ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α.1. Θεωρία
Α.2. Θεωρία
Β. α. Λ, β Λ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Λ, στ. Σ

ΘΕΜΑ 2^{o}

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$

α) $|z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = 9 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$

β) τρόπος 1^{ος}

$$w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$$

$$\overline{w} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} = w \Rightarrow w = \overline{w} \Rightarrow \operatorname{Im}(w) = 0 \Rightarrow w \in R$$

τρόπος 2^{ος}

Έστω $w = \dfrac{z_1}{z_2}$

Επειδή $|z_1| = |z_2|$ θα είναι $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = 1 \Leftrightarrow |w| = 1 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow w\overline{w} = 1 \Leftrightarrow \overline{w} = \dfrac{1}{w}$

Άρα $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = w + \dfrac{1}{w} = w + \overline{w} = 2\operatorname{Re}(w) \in R$

γ) είναι

$$\left|z_1+z_2+z_3\right|=\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|=\left|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right|=\left|\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right|=9\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=$$

$$=9\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1z_2z_3}\right|=9\frac{\left|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right|}{\left|z_1z_2z_3\right|}=9\frac{\left|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right|}{\left|z_1\right|\cdot\left|z_2\right|\cdot\left|z_3\right|}=9\frac{\left|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right|}{27}=$$

$$=\frac{1}{3}\left|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right|$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $f'(x)=\lambda\cdot e^{\lambda x}\succ 0$

Είναι $f'(x)\succ 0$ για κάθε $x\in R$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β. Έστω $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο επαφής $\mathrm{M}(x_0,y_0)$. Είναι $f(x_0)=e^{\lambda x_0}$ και $f'(x_0)=\lambda e^{\lambda x_0}$ οπότε $y-e^{\lambda x_0}=\lambda\cdot e^{\lambda x_0}(x-x_0)$.
Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων η παραπάνω εξίσωση επαληθεύεται για $x=0, y=0$, οπότε $-e^{\lambda x_0}=\lambda\cdot e^{\lambda x_0}(-x_0)\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{\lambda}$. Για $x_0=\frac{1}{\lambda}: y_0=f\left(\frac{1}{\lambda}\right)=e$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f είναι $y-e=\lambda e\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)\Leftrightarrow y=\lambda\cdot e\cdot x$. Το σημείο επαφής είναι $\mathrm{M}\left(\frac{1}{\lambda},e\right)$

γ. τρόπος 1ος

Έστω $h(x)=f(x)-y\Leftrightarrow h(x)=e^{\lambda x}-\lambda ex$. Είναι $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{1}{\lambda}\right]$ άρα

$$\mathrm{E}(\lambda)=\int_0^{1/\lambda}\left(e^{\lambda x}-\lambda ex\right)dx=\int_0^{1/\lambda}e^{\lambda x}dx-\int_0^{1}\lambda exdx=\frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda x}\right]_0^{1/\lambda}-\lambda\cdot e\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/\lambda}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}e-\frac{1}{\lambda}-\lambda e\frac{1}{2\lambda^2}=\frac{e}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}-\frac{e}{2\lambda}=\frac{e-2}{2\lambda}$$

τετρ. μονάδες.

Τρόπος 2ος
Είναι $f''(x)=\lambda^2e^{\lambda x}\succ 0$. Είναι η f συνεχής στο R και $f''(x)\succ 0$ για κάθε $x\in R$ άρα η f κυρτή στο R οπότε η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο θα είναι κάτω από τη C_f. Έστω $h(x)=f(x)-y\Leftrightarrow h(x)=e^{\lambda x}-\lambda ex$ και $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,\ 1/\lambda]$ άρα $\mathrm{E}(\lambda)=\int_0^{1/\lambda}\left(e^{\lambda x}-\lambda ex\right)dx=...=\frac{e-2}{2\lambda}$ τετρ. μονάδα.

δ. Είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot \mathrm{E}(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot\dfrac{e-2}{2\lambda}}{2+\eta\mu\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda(e-2)}{2(2+\eta\mu\lambda)}=\dfrac{e-2}{2}\cdot\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda}(1)$

Τρόπος $1^{ος}$

Είναι $-1\le\eta\eta\lambda\le1\Leftrightarrow1\le2+\eta\mu\lambda\le3\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2+\eta\mu\lambda}\le1\xrightarrow{\lambda\succ0}\dfrac{\lambda}{3}\le\dfrac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda}\le\lambda$.

Επειδή $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda}{3}=+\infty$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda=+\infty$ σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda}=+\infty$ άρα $(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot\mathrm{E}(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=+\infty$.

Τρόπος $2^{ος}$

$(1)\Leftrightarrow\dfrac{e-2}{2}\cdot\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{2}{\lambda}+\dfrac{\eta\mu\lambda}{\lambda}}$. Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\right|\le\left|\dfrac{1}{\lambda}\right|$ επειδή $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda}=0$ θα είναι

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\lambda}{\lambda}=0$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{2}{\lambda}=0$ άρα $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{2}{\lambda}+\dfrac{\eta\mu\lambda}{\lambda}}=+\infty$ αφού $\dfrac{2}{\lambda}+\dfrac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\succ0$ άρα

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot\mathrm{E}(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=+\infty$.

ΘΕΜΑ $4^ο$

α. Είναι $2f'(x)=\dfrac{e^x}{e^{f(x)}}\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}=\dfrac{1}{2}e^x\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)'=\left(\dfrac{1}{2}e^x\right)'\Leftrightarrow e^{f(x)}=\dfrac{1}{2}e^x+C$.

Για $x=0: e^{f(0)}=\dfrac{1}{2}e^0+C\xrightarrow{f(0)=0}1=\dfrac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=\dfrac{1}{2}$. Άρα

$e^{f(x)}=\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow e^{f(x)}=\dfrac{e^x+1}{2}\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)$.

β. Θέτουμε $u=x-t$ οπότε $du=-dt$

Για $t=0$ τότε $u=x$
$t=x$ τότε $u=0$

οπότε $\int_0^x f(x-t)\,dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)\,du$. Είναι η $\phi(x)=\int_0^x f(u)\,du$

συνεχής στο $x_0=0$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to0}\phi(x)=\phi(0)=\int_0^0 f(u)\,du=0$

άρα $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\,du}{\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x f(u)\,du\right)'}{(\eta\mu x')}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}(1)$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R θα είναι και συνεχής, οπότε θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$ δηλαδή $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ άρα $(1)=\dfrac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0}=f(0)=0$.

γ. Είναι

$$h(x)=\int_{-x}^{x}t^{2005}f(t)dt=\int_{-x}^{c}t^{2005}f(t)\,dt+\int_{c}^{x}t^{2005}f(t)\,dt=-\int_{c}^{-x}t^{2005}f(t)\,dt+\int_{c}^{x}t^{2005}f(t)\,dt$$

οπότε

$$h'(x)=-\left(-x^{2005}\right)f(-x)(-x)'+x^{2005}f(x)=-x^{2005}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)+x^{2005}\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2}\right)=$$

$$=-x^{2005}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{e^{x}}}{2}\right)+x^{2005}\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2}\right)=-x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2e^{x}}\right)+x^{2005}\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2}\right)=$$

$$=x^{2005}\left[\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2}\right)-\ln\left(\frac{1+e^{x}}{2e^{x}}\right)\right]=x^{2005}\ln\left(\frac{\frac{1+e^{x}}{2}}{\frac{1+e^{x}}{2e^{x}}}\right)=x^{2005}\cdot\ln e^{x}=x\cdot x^{2005}=x^{2006}$$

είναι $g'(x)=x^{2006}$ οπότε $h'(x)=g'(x)\Leftrightarrow h(x)=g(x)+C$ για

$x=0:h(0)=g(0)+C$

για $x=0:h(0)=\int_0^0 t^{2005}f(t)\,dt=0$ και $g(0)=0$ οπότε $C=0$ άρα $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in R$.

δ. Έστω $\mathrm{H}(x)=g(x)-\dfrac{1}{2008}$. Είναι η H συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$\mathrm{H}(0)=g(0)-\frac{1}{2008}=-\frac{1}{2008}\prec 0$$

$$\mathrm{H}(1)=g(1)-\frac{1}{2008}=\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}=\frac{1}{2007\cdot 2008}\succ 0.$$

Είναι $\mathrm{H}(0)\cdot\mathrm{H}(1)\prec 0$ Άρα η εξίσωση $\mathrm{H}(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Είναι $\mathrm{H}'(x)=g'(x)=x^{2006}\succ 0$

Είναι η H συνεχής στο $[0,1]$ και $\mathrm{H}'(x)\succ 0$ για κάθε $x\in(0,1)$ άρα η H είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και επομένως η $\mathrm{H}(x)=0$ έχει μία το πολύ πραγματική ρίζα στο $(0,1)$. Άρα η $\mathrm{H}(x)=0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα στο $(0,1)$.

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές του φροντιστηρίου ΒΑΚΑΛΗ.