ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α.1 ΘΕΩΡΙΑ Σελίδες βιβλίου 253

Α.2 ΘΕΩΡΙΑ Σελίδες βιβλίου 273

Β. α. Λ

β. Σ

γ. Σ

δ. Λ

ε. Σ

ΘΕΜΑ 2^{o}

$f(x) = 2+(x-2)^2$, $x \geq 2$

α) $f'(x)=2(x-2)>0$ για κάθε $x>2$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ οπότε είναι «1-1»
β) $f(x)=y$ άρα : $(x-2)^2+2=y \Leftrightarrow \ldots x=\sqrt{y-2}+2$, με $y \geq 2$
(η $x=-\sqrt{y-2}+2$ απορρίπτεται αφού $x \geq 2$)
Άρα $f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+2$ με $x \geq 2$.
γ) $\left.\begin{matrix} y = f(x) = 2 + (x-2)^2 \\ y = x \end{matrix}\right\}$ $x^2-4x+4+2=x$ άρα $x=2$, $x=3$ οπότε τα κοινά σημεία είναι Α(2,2) και Β(3,3)
Αφού $f''(x)=2>0$ το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

E= $2\int_2^3 [x-2-(x-2)^2]dx$ =$2\int_2^3 (-x^2+5x-6)dx$ =…= $\frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ 3ο

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$

και $z_1+z_2+z_3=0$ (1)

(α)

(i) Έστω $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$ λόγω (1)

$|z_1 + z_1 + z_3|$ = $|-z_1 - z_3 - z_3|$

$\Leftrightarrow |2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow (2z_1 + z_3).(2\overline{z_1} + \overline{z_3}) = (z_1 + 2z_3).(\overline{z_1} + 2\overline{z_3}) \Leftrightarrow \ldots$

4+1=1+4 (ισχύει)

Ομοίως η $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$.

(ii) Είναι $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |-z_2| = 1+1 = 2$ άρα $|z_1 - z_2|^2 \le 4$

Οπότε : $(z_1-z_2).(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \le 4$

$\Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \le 4 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \ge -2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \ge -1$

(β) Ο γ.τ. είναι κύκλος κέντρου 0 (0,0) και ρ = 1

Το είδος του τριγώνου είναι ισόπλευρο

Σχόλιο : επειδή $|z_1 - z_2|^2$ =…= 3 ισχύει $|z_1 - z_2|^2 < 4$ και αντίστοιχα $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) > -1$

ΘΕΜΑ 4ο

f(x)= $\frac{\chi+1}{\chi-1}$ - lnx A_f: $(0,1)\cup(1,+\infty)$

f ’(x)= $\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x}$ <0

Άρα η f γν. φθίνουσα στο (0,1) και στο $(1,+\infty)$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = -\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = +\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της f στο (0,1) είναι όλο το R

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x\right) = -\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της f στο (1,+∞) είναι όλο το R

Β) Αφού f γν. φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα (0,1) και (1,+∞) με σύνολο τιμών το R σε κάθε ένα από αυτά θα έχει ακριβώς μία ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα (0,1) και (1,+∞)

Γ) g (x)=ln x   h(x)=e^x

A (α,ln α), α>0   B (β,e^β)

Εξ. εφαπτομένης της C_g στο A: y-lnα=$\frac{1}{\alpha}$(x-α), y=$\frac{1}{a}$x+lnα-1

Εξ. εφαπτομένη της C_h στο B:y-e^β =e^β (x-β), y=e^β x+e^β -βe^β

Άρα πρέπει :$\frac{1}{a}$=e^β lnα –1=e^β -βe^β

β=ln$\frac{1}{a}$ $\Leftrightarrow$ β=-lnα   lnα-1=$\frac{1}{\alpha}$+lnα $\frac{1}{\alpha}$ $\Leftrightarrow$ lnα –α=1+lnα $\Leftrightarrow$

1+lnα+α-α lnα=0

$\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$-lnα=0, επομένως f(α)=0

Άρα το α ρίζα της f(x)=0

Δ) Από το 4 $_{γ΄,}$ ερώτημα η εξίσωση f(α)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες βάση του 4 $_{β'}$ ερωτήματος, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες

Επιμέλεια : Καθηγητών Φροντιστηρίων Βακάλη