ΒΑΚΑΛΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΠΟ ΤΟ 1967

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 ΘΕΩΡΙΑ Σελίδες βιβλίου 98

Α.2 ΘΕΩΡΙΑ Σελίδες βιβλίου 141

Α.3 ΘΕΩΡΙΑ Σελίδες βιβλίου 280

Β. **α. Λ**
β. Λ
γ. Λ
δ. Σ
ε. Σ

ΘΕΜΑ 2^{o}

α) Αρκεί $|z|=1$

Είναι $|z|=\left|\frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right|=\frac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|}=\frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}}=1$

Άρα η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο O (0, 0) και ακτίνα ρ=1

β) για α=0 είναι $z_1=\frac{2}{2i}=-i$

για α=2 είναι $z_2=\frac{2+2i}{2+2i}=1$

Είναι $|z_1-z_2|=|-i-1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

γ) Είναι $\left.\begin{array}{l}(z_1)^{2\nu}=(-i)^{2\nu}=\left(i^2\right)^{\nu}=(-1)^{\nu}\\ \text{και } (-z_2)^{\nu}=(-1)^{\nu}\end{array}\right\}$ Άρα $(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^{\nu}$

ΘΕΜΑ 3^{o}

(α) Είναι f(x) $=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$ με $A_f=\mathbb{R}$.Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$

Είναι $f'(x)=3x^2-3$

Επίσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

x	$-\infty$	-1 1	$+\infty$
f'(x)	+	-	+
f (x)	↗	↘	↗

Είναι η f συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και f' (x)>0 για κάθε $x\in(-\infty,-1)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$.

Είναι η f συνεχής στο $[-1,1]$ και f'(x) <0 για κάθε $x\in(-1, 1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.

Είναι η f συνεχής στο $[1,+\infty)$ και f' (x)>0 για κάθε $x \in (1,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα για x=-1 η f παρουσιάζει
Τ.Μ το $f(-1)=-1+3-2ημ^2θ=2-2ημ^2θ=2συν^2θ>0$

Και για x=1 η f παρουσιάζει
Τ.Ε το $f(1)=1-3-2ημ^2θ=-2(1+ημ^2θ)<0$
Είναι $f''(x)=6x$
Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
f''(x)	-	+
f (x)	κοίλη	κυρτή

Είναι η f συνεχής στο $(-\infty,0]$ και f''(x)<0 για κάθε $x \in (-\infty,0)$, άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$. Είναι η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ και f''(x)>0 για κάθε $x \in (0,+\infty)$ άρα η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Άρα για x=0 η f έχει Σ.Κ. το Γ (0, f (0)).
Επειδή $f(0)=-2ημ^2θ$ το Σ.Κ είναι το σημείο $Γ(0, -2\,ημ^2θ)$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x-2ημ^2θ) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ και
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x-2ημ^2θ) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Έστω $Δ_1=(-\infty,-1]$. Είναι f συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$. Άρα $f(Δ_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(-1)\right]=(-\infty, 2συν^2θ]$

Επειδή $2συν^2θ>0$ για κάθε $θ \neq κΠ+\frac{Π}{2}$, το $0\in f(Δ_1)$. Άρα η f (x)=0 θα έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο $(-\infty,-1]$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$, η f (x)=0 θα έχει μια το πολύ πραγματική ρίζα στο $(-\infty,-1]$.
Άρα η f (x)=0 θα έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο $(-\infty,-1]$
Έστω $Δ_2$= [-1,1]. Είναι η f συνεχής στο [-1,1] και γνησίως φθίνουσα στο [-1,1] . Άρα $f(Δ_2)=[f(1),f(-1)]=[-2(1+ημ^2θ), 2συν^2θ]$. Επειδή

$-2(1+\eta\mu^2\theta)<0$ και $2\sigma\upsilon\nu^2\theta>0$ για κάθε $\theta\neq K\Pi+\frac{\Pi}{2}$, το $0\in f(\Delta_2)$. Άρα η $f(x)=0$ θα έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο $[-1,1]$.
Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$, η $f(x)=0$ θα έχει μια το πολύ πραγματική ρίζα στο $[-1,1]$. Άρα η $f(x)=0$ θα έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο $[-1,1]$. Έστω $\Delta_3=[1,+\infty)$. Είναι η f συνεχής στο $[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα $f(\Delta_3)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-2(1+\eta\mu^2\theta),+\infty)$.

Επειδή $-2(1+\eta\mu^2\theta)<0$ για κάθε $\theta\neq K\Pi+\frac{\Pi}{2}$, το $0\in f(\Delta_3)$.

Άρα η $f(x)=0$ θα έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο $[1,+\infty)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, η $f(x)=0$ θα έχει μία το πολύ πραγματική ρίζα στο $[1,+\infty)$. Άρα η $f(x)=0$ θα έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο $[1,+\infty)$

γ) Είναι $A(-1, f(-1))$ δηλαδή $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$
$B(1, f(1))$ δηλαδή $B(1,-2(1+\eta\mu^2\theta))$
$\Gamma(0, f(0))$ δηλαδή $\Gamma(0,-2\eta\mu^2\theta)$
Για να ανήκουν τα σημεία A, B, Γ στην ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$ αρκεί οι συντεταγμένες τους να ικανοποιούν την εξίσωση της.

Για το A: $2\sigma\upsilon\nu^2\theta=2-2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta=2(1-\eta\mu^2\theta) \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta$ ισχύει
Για το B: $-2(1+\eta\mu^2\theta)=-2-2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2(1+\eta\mu^2\theta)=-2(1+\eta\mu^2\theta)$ ισχύει
Για το Γ: $-2\eta\mu^2\theta=0-2\eta\mu^2\theta$ ισχύει

δ) Είναι $f(x)=y \Leftrightarrow x^3-3x-2\eta\mu^2\theta=-2x-2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=0$ ή $x=1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f(x)-y		-		+		-		+	

Είναι $E = \int_{-1}^{1} |f(x) - y|\, dx =$

$$= \int_{-1}^{1} |x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta + 2x + 2\eta\mu^2\theta| dx = \int_{-1}^{1} |x^3 - x| dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x) dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} + [-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}]_{0}^{1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Η F παραγωγίσιμη αφού $f \cdot g$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων οπότε

$F'(x) = f(x) \cdot g(x)$. Είναι η f γνησίως αύξουσα στο [0,1] οπότε για x>0 ισχύει f(x)>f(0)>0 επίσης g(x)>0

Άρα F' (x)>0. Είναι η F συνεχής στο [0,1] και F'(x)>0 για κάθε $x \in (0,1)$ άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1] οπότε για x>0 ισχύει $F(x) > F(0) = \int_{0}^{0} f(t)g(t)dt = 0$ Άρα F(x)>0

β) Είναι g(t)>0 για κάθε $t \in (0,1]$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για 0<t<x ισχύει f(t)<f(x), οπότε

$f(x) \cdot g(t) > f(t)g(t) \Leftrightarrow f(x) \cdot g(t) - f(t)g(t) > 0$

Άρα και

$$\int_{0}^{x} (f(x)g(t) - f(t)g(t))dt > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{x} f(x)g(t)dt - \int_{0}^{x} f(t)g(t)dt > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x)\int_{0}^{x} g(t)dt > \int_{0}^{x} f(t)g(t)dt$$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

γ) Έστω:

$$H(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$$

Είναι $H'(x)=\dfrac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}$

$$H'(x)=\frac{f(x)g(x)G(x)-F(x)g(x)}{G^2(x)}$$

$H'(x)=\dfrac{g(x)(f(x)G(x)-F(x)}{G^2(x)}>0$ *αφού g(x)>0 και f(x)G(x)-F(x)>0 από το προηγούμενο ερώτημα.*

Είναι η H συνεχής στο (0,1], και H'(x)>0 για κάθε $x\in(0,1)$ *άρα η H είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1]*

Άρα για $x\leq 1$ *ισχύει* $H(x)\leq H(1)\Leftrightarrow \dfrac{F(x)}{G(x)}\leq\dfrac{F(1)}{G(1)}$

δ)

Επειδή F(x), G(x), $\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt$, x^5 είναι συνεχείς συναρτήσεις ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}\quad(1)$$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}f(x)=$

$= f(0)$ *(αφου η f είναι συνεχής στο $x_0=0$)*

Επίσης $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\eta\mu x^4}{5x^4}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{5}\cdot\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\right)=$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{5}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4}$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\;\underset{x\to 0^+ : \omega\to 0^+}{\overset{x^4=\omega}{=}}\;\lim_{\omega\to 0^+}\frac{\eta\mu\omega}{\omega}=1$

οπότε (2) $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \eta\mu t^2 dt}{x^5}=0\cdot 1=0$

Άρα $(1)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}=f(0)\cdot 0=0$