ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΠΟ ΤΟ 1967

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2009**

## ΘΕΜΑ 1$^{Ο}$

**Α.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.251

**Β.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.213

**Γ** **α.** Σ
**β.** Σ
**γ.** Λ
**δ.** Λ
**ε.** Λ

## ΘΕΜΑ 2$^{Ο}$

**Α. α)** Θέτουμε z=x+yi, x,y, $\in$ R
Ζητάμε x=2λ+1
y=2λ-1
Αφαιρώντας κατά μέλη: y-x=-2 , $(\varepsilon)$: y=x-2 ευθεία

**β)** Έστω η ευθεία $(\eta)\perp(\varepsilon)$ και διέρχεται από Ο (0,0), άρα (η): y=-x
Λύνοντας σύστημα (ε) και (η) : χ=1 και y=-1 άρα $Z_0=1-i$

**Β.** Έστω w=x+yi, x, y $\in$ R

$$|w|^2 + \overline{w} - 1^2 = z_0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + x - 13 + (1 - y)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x - 13 = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ x = 3 \ \ \acute{\eta} \ \ -4$$

Άρα w=3+i ή w=-4+i

## ΘΕΜΑ $3^{O}$

**Α)** $f(x) \geq 1 \ \forall \ x \in$ R *και* f(0)=1 Δηλαδή η f *παρουσιάζει στη θέση* $x_0$=0 ελάχιστο, που είναι εσωτερικό σημείο, με τιμή f(0)=1 *και* η f παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με

$f'(x) = a^x \ln a - \dfrac{1}{x+1}, \ x > -1 \ \acute{\alpha}\rho\alpha \ \kappa\alpha\iota \ \sigma\tau o \ x_0 = 0$. Από Θ.Fermat

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow a^0 \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$

**Β)** Για α=e, $f(x) = e^x - \ln(x+1), \ x > -1$

**α.** $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}, \ \forall \ x > -1$

$f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \ \ \forall \ x > -1$. Άρα η f *κυρτή* στο $(-1, +\infty)$.

**β.** Η f *κυρτή* στο $(-1, +\infty)$ οπότε η f' γν. αύξουσα στο $(-1, +\infty)$ *και* f'(0)=0.

Για *κάθε* x>0 $\Leftrightarrow f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Για *κάθε* $x \in (-1, 0) \ \mu\varepsilon \ x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

| x | -1 | | 0 | | -∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' (x) | | - | 0 | + | |
| f' (x) | | γν.φθίνουσα | ελάχιστο<br>f(0)=1 | γν.αύξουσα | |

Η f συνεχής στο (-1, 0] και παραγωγίσιμη στο (-1,0) με f'(x)<0, άρα η f γν.φθίνουσα στο (-1, 0]. Η f συνεχής στο [0, +∞) και παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με f'(x)>0, άρα η f γν. αύξουσα στο [0, +∞).

**γ.** $\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow (x-2)(f(\beta)-1)+(x-1)(f(\gamma)-1)=0$

Θέτουμε h(x)=(x-2)(f(β)-1)+(x-1)(f(γ)-1) και ζητάμε να δείξουμε ότι η εξίσωση h(x)=0 έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (1,2). Η h συνεχής στο [1,2].

$\left.\begin{array}{l} h(1)=1-f(\beta) \\ h(2)=f(\gamma)-1 \end{array}\right\}$ h(1)h(2)<0, αφού $f(x)\geq 1,\ \forall\ x>-1$

και f(x)=1 μόνο για x=0.

Δηλαδή 1-f(β)<0 και f(γ)-1>0. Από Θ.Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της h(x)=0 άρα και της αρχικής εξίσωσης.

## ΘΕΜΑ 4$^{O}$

**α)** Η G συνεχής στο (0,2] ως πράξεις των συνεχών $\frac{H(x)}{x}$ *και* $\int_0^x f(t)dt$ που είναι συνεχείς ως παραγωγίσιμες. Επειδή f(t) και tf(t) συνεχείς στο [0,2].

$$G(0)=6\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}= \ 6\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=3$$

$$\lim_{x\to 0^+}G(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3\right]=0-0+3=3$$

Αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x}= \text{(d L'Hosp)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\int_0^x tf(t)dt)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{1}=0\bullet f(o)=0$$ (Η f συνεχής στο [0,2] ).

**β)** Για $x\in(0,2)$ *έχουμε* $G(x)=\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3$.

Η G είναι παραγωγίσιμη στο (0,2) από ερώτημα (α) με

$$G'(x)=\left(\frac{H(x)}{x}\right)'-\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=\frac{H'(x).x-H(x)}{x^2}-f(x)$$

$$=\frac{1}{x}H'(x)-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)$$

και $H'(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=xf(x)$

Άρα $G'(x)=\frac{1}{x}xf(x)-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)$

$G'(x)=-\frac{H(x)}{x^2}$, για κάθε $x\in(0,2)$.

**γ)** G(0)=3

$$G(2)=\frac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=\frac{1}{2}\int_0^2 tf(t)dt-\int_0^2 f(t)dt+3=\frac{1}{2}[\int_0^2 tf(t)dt-\int_0^2 2f(t)td]+3$$

$$=\frac{1}{2}[\int_0^2 (t-2)f(t)dt]+3=\frac{1}{2}\bullet 0+3=3$$

Η G συνεχής [0,2]

Η G παραγωγίσιμη (0,2)

G(0)=G(2)=3

Από θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $a\in(0,2)$ ώστε

G'(α)=0 $\Leftrightarrow -\frac{H(a)}{a^2}=0\Leftrightarrow H(a)=0$

**δ)** Η G συνεχής στο [0,α] $\subseteq[0,2]$

Η G παραγωγίσιμη στο (0,α) $\subseteq[0,2]$

G(0)=3

$G(\alpha)=\frac{\mathrm{H}(\alpha)}{\alpha}-\int_0^\alpha f(t)dt+3=3-\int_0^\alpha f(t)dt$. (από (γ) Η(α)=0).

Από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένας αριθμός ξ $\in(0,\alpha)$ ώστε

$$G'(\xi)=\frac{G(\alpha)-G(0)}{a-0}\Leftrightarrow\frac{-H(\xi)}{\xi^2}=\frac{-\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\mathrm{H}(\xi)=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt\Leftrightarrow a\int_0^\xi tf(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt.$$

*Παρατήρηση: Δεύτερος τρόπος επίλυσης με το Θ.Rolle για κατάλληλη συνάρτηση.

**Επιμέλεια: Καθηγητών Φροντιστηρίων Βακάλη**