ΒΑΚΑΛΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΠΟ ΤΟ 1967

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
(ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Α. ΘΕΩΡΙΑ Σελίδα 224 σχολικού βιβλίου

Β. ΘΕΩΡΙΑ Ορισμός Σελίδα 149 σχολικού βιβλίου

Γ. 1.Σ
2.Λ
3.Σ
4.Σ
5.Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $|z_1| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$ και $|z_2| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$ και $|z_3| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, οπότε $|z_1|^2+|z_2|^2=1+1=2=|z_3|^2$.

β) i) Έστω $z = x+yi$, οπότε

$$|z-z_1| = |z-z_2| \Leftrightarrow |z-i| = |z-1| \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |(x-1)+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2 \Leftrightarrow y=x$$

Άρα $Re(z)=Im(z)$

ii) Επειδή από το πρώτο ερώτημα ισχύει Re(z)=Im(z), ο μιγαδικός z θα είναι της μορφής $z=x+xi,\ x\neq 0$. Είναι A=

$$\frac{z}{\bar z}+\frac{\bar z}{z}=\frac{x+xi}{x-xi}+\frac{x-xi}{x+xi}=\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2+1-2i+i^2}{2}=\frac{0}{2}=0$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι $f\left(\frac{1}{e^5}\right)=\ln\frac{1}{e^5}+\frac{1}{4\frac{1}{e^5}}=-5+\frac{e^5}{4}>0$

Επίσης $f\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\frac{1}{4}+\frac{1}{4\frac{1}{4}}=-\ln 4+1=-2\ln 2+1<0$ *και*

$f\left(e^5\right)=\ln e^5+\frac{1}{4e^5}=5+\frac{1}{4e^5}>0$

β) Για $x=1: f(1)=\ln 1+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ Είναι $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^2}$,

οπότε για x=1 : $f'(1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{2}{4}\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}.$$

γ) Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^2}=0\Leftrightarrow 4x^2=x\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}4x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

x	0		¼		$+\infty$
f'		-	0	+	
f		↘		↗	

Είναι η f συνεχής στο $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ και $f'(x)\langle 0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{4}\right]$.

Είναι η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$ και $f'(x)\rangle 0$ για κάθε $x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$,άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

δ) Είναι η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{e^5},\frac{1}{4}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $f\left(\frac{1}{e^5}\right)\bullet f\left(\frac{1}{4}\right)\langle 0$, οπότε σύμφωνα με το θ. Bolzano η εξίσωση

$f(x)=0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left[\frac{1}{e^5},\frac{1}{4}\right]$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{e^5},\frac{1}{4}\right]$, η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μία το πολύ πραγματική ρίζα στο $\left[\frac{1}{e^5},\frac{1}{4}\right]$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα στο $\left[\frac{1}{e^5},\frac{1}{4}\right]$, οπότε και στο διάστημα$\left(0,\frac{1}{4}\right]$. Είναι η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{4},e^5\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $f\left(\frac{1}{4}\right)\bullet f\left(e^5\right)\langle 0$, οπότε σύμφωνα με το θ.Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left[\frac{1}{4},e^5\right]$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4},e^5\right]$ η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μία το πολύ πραγματική ρίζα στο $\left[\frac{1}{4},e^5\right]$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα στο $\left[\frac{1}{4},e^5\right]$,οπότε και στο διάστημα $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει δυο ακριβώς πραγματικές ρίζες στο διάστημα $(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Είναι η h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα δύο παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων και

$h'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)+4e^{-4x}=e^{-x}(f'(x)-f(x))+4e^{-4x}=$

$e^{-x}(-4e^{-3x})+4e^{-4x}=-4e^{-4x}+4e^{-4x}=0$

Άρα η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Για x=0: $h(0)=e^0 f(0)-e^0=1\cdot 2-1=1$. Άρα $h(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

οπότε $e^{-x}f(x)-e^{-4x}=1 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^{-4x}+1}{e^{-x}} \Leftrightarrow f(x)=e^{-3x}+e^{x} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{e^{3x}}+e^{x}$

γ) Είναι $I(x)=\int_0^x f(t)dt$ Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα

ισχύει $I'(x)=f(x)=e^{x}+\dfrac{1}{e^{3x}}$

Οπότε $I(x)=e^{x}-\dfrac{1}{3}e^{-3x}+C$.

Για x=0 ισχύει $I(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$ (1)

και $I(0)=e^0-\dfrac{1}{3}e^0+C \Leftrightarrow I(0)=\dfrac{2}{3}+C$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα ισχύει $\dfrac{2}{3}+C=0 \Leftrightarrow C=-\dfrac{2}{3}$

Άρα $I(x)=e^{x}-\dfrac{1}{3}e^{-3x}-\dfrac{2}{3}$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{2}{3}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{3x^2e^{3x}}-\dfrac{2}{3x^2}\right)$ (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$ Επίσης

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3x^2e^{3x}}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3x^2}=0$.

Άρα (1) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3x^2e^{3x}}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3x^2}=+\infty$