3 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ 1.5

ΘΕΜΑ Α

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=3$, για τα οποία ισχύει ότι : $(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta})\perp(6\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.

Α1. Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

Α2. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, με $\lambda\in\Re$ το οποίο είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$. Να βρείτε :

Α3. Την τιμή του λ,

Α4. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$,

Α5. Τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha},\vec{\gamma})$.

ΛΥΣΗ :

Α1. $(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta})\perp(6\vec{\alpha}+\vec{\beta})\Leftrightarrow(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta})\cdot(6\vec{\alpha}+\vec{\beta})=0\Leftrightarrow 18\vec{\alpha}^2+3\vec{\alpha}\vec{\beta}+42\vec{\alpha}\vec{\beta}+7\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18|\vec{\alpha}|^2+3\vec{\alpha}\vec{\beta}+42\vec{\alpha}\vec{\beta}+7|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow 45\vec{\alpha}\vec{\beta}=-135\Leftrightarrow\boxed{\vec{\alpha}\vec{\beta}=-3}$

Α2. $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\dfrac{-3}{2\cdot3}=\dfrac{-1}{2}$ άρα $\boxed{(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{2\pi}{3}}$ ή $\boxed{(\vec{\alpha},\vec{\beta})=120°}$

Α3. $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, όμως $\vec{\gamma}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow(\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow-3\lambda+|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-3\lambda+9=0\Leftrightarrow\boxed{\lambda=3}$

Α4. $|\vec{\gamma}|^2=\vec{\gamma}^2=(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=9\vec{\alpha}^2+6\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=9|\vec{\alpha}|^2+6\cdot(-3)+|\vec{\beta}|^2=36-18+9=27$

Άρα $|\vec{\gamma}|=\sqrt{27}\Leftrightarrow\boxed{|\vec{\gamma}|=3\sqrt{3}}$

Α5. $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\gamma})=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\gamma}|}=\dfrac{\vec{\alpha}(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})}{2\cdot3\sqrt{3}}=\dfrac{3\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{6\sqrt{3}}=\dfrac{3|\vec{\alpha}|^2-3}{6\sqrt{3}}=\dfrac{12-3}{6\sqrt{3}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

άρα $\boxed{(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\pi}{6}}$ ή $\boxed{(\vec{\alpha},\vec{\beta})=30°}$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία Α(3,-1) , Β(7,2) και Γ $(-\frac{5}{7},-2)$.

Β1. Να δείξετε ότι αποτελούν κορυφές τριγώνου.

Β2. Αν ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{AB},\vec{AM})$.

Β3. Να βρείτε σημείο Ρ του άξονα x΄x ώστε το τρίγωνο ΑΡΒ να είναι ορθογώνιο στο Ρ.

Β4. Να βρείτε την προβολή του $\vec{AM}$ στο $\vec{AB}$.

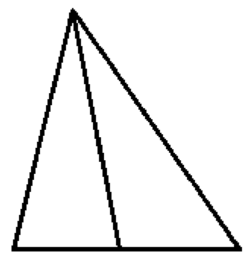
ΛΥΣΗ :

Β1. Για να αποτελουν τα Α,Β,Γ κορυφες τριγωνου, αρκει να μην είναι συνευθειακα δηλ. αρκει : τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ να μην είναι παραλληλα. Αρκει να δείξω ότι : $\det\left(\vec{AB},\vec{A\Gamma}\right)\neq 0$

Έχω : $\vec{AB}=(4,3)$, $\vec{B\Gamma}=\left(-\frac{5}{7}-7,-2-2\right)=\left(-\frac{54}{7},-4\right)$

Έτσι : $\det\left(\vec{AB},\vec{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -\frac{54}{7} & -4\end{vmatrix}=-16+\frac{162}{7}=\frac{162}{7}-\frac{112}{7}=\frac{50}{7}\neq 0$ επομένως τα Α,Β,Γ αποτελουν κορυφες τριγωνου.

Β2.



Το Μ είναι μεσο του ΒΓ άρα : $x_M=\frac{x_B+x_\Gamma}{2}=\frac{22}{7}$, $y_M=\frac{y_B+y_\Gamma}{2}=0$ άρα $M\left(\frac{22}{7},0\right)$

$$\vec{AM}=(x_M-x_A,y_M-y_A)=\left(\frac{1}{7},1\right)$$

$$\sigma\upsilon\nu(\vec{AB},\vec{AM})=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AM}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AM}|}=\frac{4\cdot\frac{1}{7}+3\cdot 1}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{\frac{1}{49}+1}}=\frac{\frac{25}{7}}{5\cdot\sqrt{\frac{50}{49}}}=\frac{\frac{25}{7}}{5\cdot\frac{5\sqrt{2}}{7}}=\frac{25}{25\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα : $\boxed{(\vec{AB},\vec{AM})=\frac{\pi}{4}}$ ή $\boxed{(\vec{AB},\vec{AM})=45°}$

B3. Το $\mathrm{P} \in x'x$ άρα θα είναι της μορφής $\mathrm{P}(x,0)$. Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ορθογώνιο στο Ρ άρα :

<u>1ος τροπος</u> Θα ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα δηλ.

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{AP})^2 + (\mathrm{BP})^2 \Leftrightarrow \sqrt{(7-3)^2+(2+1)^2}^{\,2} = \sqrt{(x-3)^2+(0+1)^2}^{\,2} + \sqrt{(x-7)^2+(0-2)^2}^{\,2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 19 = 0 \quad \Delta = 24 \quad x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 5 \pm \sqrt{6}$$

Άρα $\boxed{\mathrm{P}_1(5+\sqrt{6},0) \text{ και } \mathrm{P}_2(5-\sqrt{6},0)}$

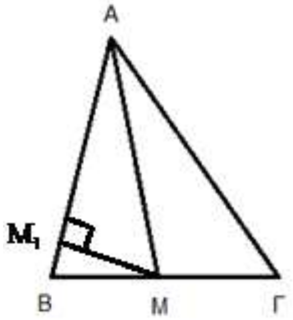
<u>2ος τροπος</u> Θα ισχύει : $\vec{\mathrm{PA}} \perp \vec{\mathrm{PB}} \Leftrightarrow \vec{\mathrm{PA}} \cdot \vec{\mathrm{PB}} = 0$, $\vec{\mathrm{PA}} = (3-x,-1)$ και $\vec{\mathrm{PB}} = (7-x,2)$

Άρα : $\vec{\mathrm{PA}} \cdot \vec{\mathrm{PB}} = 0 \Leftrightarrow (3-x)(7-x) - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 19 = 0$

$$\Delta = 24 \quad x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 5 \pm \sqrt{6}$$

Άρα $\boxed{\mathrm{P}_1(5+\sqrt{6},0) \text{ και } \mathrm{P}_2(5-\sqrt{6},0)}$

B4.



Έστω $\vec{\mathrm{AM}}_1 = \pi\rho o\beta_{\vec{\mathrm{AB}}} \vec{\mathrm{AM}}$,

τότε $\vec{\mathrm{AM}}_1 // \vec{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \vec{\mathrm{AM}}_1 = \lambda\vec{\mathrm{AB}}$

Όμως $\vec{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{AB}} = \vec{\mathrm{AM}}_1 \cdot \vec{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \frac{25}{7} = \lambda\, \vec{\mathrm{AB}} \cdot \vec{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \frac{25}{7} = \lambda\, \vec{\mathrm{AB}}^2 \Leftrightarrow \frac{25}{7} = \lambda \left|\vec{\mathrm{AB}}\right|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{25}{7} = \lambda\sqrt{25}^{\,2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{7}$. Άρα $\vec{\mathrm{AM}}_1 = \frac{1}{7}\vec{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \vec{\mathrm{AM}}_1 = \frac{1}{7}(4,3) \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathrm{AM}}_1 = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)}$.

ΘΕΜΑ Γ

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ οι διανυσματικές τους ακτίνες αντίστοιχα, με σημείο αναφοράς το Ο. Ισχύουν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = \sqrt{7}$ και $2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 3\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} - 6\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = -54$,

Γ1. Να βρείτε το $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}|$ (Υπόδειξη : $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$)

Γ2. Να δείξετε ότι ισχύει : $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0}$ και στη συνέχεια ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Γ3. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Γ4. Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $\vec{x} \,//\, (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ και $(\vec{x} + \vec{\alpha}) \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$. Να γράψετε το $\vec{x}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

<u>ΛΥΣΗ :</u>

Γ1. $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}|^2 = (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma})^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2 + 9\vec{\gamma}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\alpha}\vec{\gamma} - 12\vec{\beta}\vec{\gamma} =$

$= |\vec{\alpha}|^2 + 4|\vec{\beta}|^2 + 9|\vec{\gamma}|^2 + 2(2\vec{\alpha}\vec{\beta} - 3\vec{\alpha}\vec{\gamma} - 6\vec{\beta}\vec{\gamma}) = 108 - 108 = 0$, άρα $\boxed{|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}| = 0}$.

Γ2. Είναι $\vec{\alpha} = \vec{OA}$, $\vec{\beta} = \vec{OB}$ και $\vec{\gamma} = \vec{O\Gamma}$. Άρα επειδή :

$|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OA} + 2\vec{OB} - 3\vec{O\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{AA} - \vec{AO} + 2\vec{AB} - 2\vec{AO} - 3\vec{A\Gamma} + 3\vec{AO} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{AB} = 3\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{A\Gamma}$

Άρα $\vec{AB} \,//\, \vec{A\Gamma}$ δηλ. Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

Γ3. $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = 3\vec{\gamma} \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = (3\vec{\gamma})^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{9}{2}}$.

Επίσης : $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = \dfrac{\frac{9}{2}}{3\cdot 3} = \dfrac{1}{2}$, άρα $\boxed{(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}}$ ή $\boxed{(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ}$

Γ4. $\vec{x} \,//\, (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \Leftrightarrow \vec{x} = \lambda(\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \Leftrightarrow \vec{x} = \lambda\vec{\beta} - \lambda\vec{\gamma}$

Επίσης : $(\vec{x} + \vec{\alpha}) \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \Leftrightarrow (\vec{x} + \vec{\alpha})\cdot(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x}\vec{\beta} + \vec{x}\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0 \overset{*}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \vec{x}\cdot(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) + \frac{9}{2} + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda\vec{\beta} - \lambda\vec{\gamma})\cdot(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) + \frac{21}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda\vec{\beta}^2 + \lambda\vec{\beta}\vec{\gamma} - \lambda\vec{\beta}\vec{\gamma} - \lambda\vec{\gamma}^2 = -\frac{21}{2} \Leftrightarrow \lambda\left(|\vec{\beta}|^2 - |\vec{\gamma}|^2\right) = -\frac{21}{2} \Leftrightarrow 2\lambda = -\frac{21}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -\frac{21}{4}}$

Άρα : $\boxed{\vec{x} = -\frac{21}{4}\vec{\beta} + \frac{21}{4}\vec{\gamma}}$ (* $\vec{\alpha} - 3\vec{\gamma} = -2\vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{\alpha} - 3\vec{\gamma})^2 = (-2\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma} = 6$)