ΒΑΚΑΛΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

α) $A = \left(\frac{1}{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2 - \left(\frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \left(\frac{1-\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \left(\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \left(\frac{1-2\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2$$

$$= \frac{1-(1-4\eta\mu^2\alpha+4\eta\mu^4\alpha)}{\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{1-1+4\eta\mu^2\alpha-4\eta\mu^4\alpha}{\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha} =$$

$$= \frac{4\eta\mu^2\alpha(1-\eta\mu^2\alpha)}{\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{4\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = 4$$

$$B = \sqrt{(3\eta\mu\alpha+4\sigma\upsilon\nu\alpha)^2+(4\eta\mu\alpha-3\sigma\upsilon\nu\alpha)^2} =$$

$$\sqrt{9\eta\mu^2\alpha+24\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+16\sigma\upsilon\nu^2\alpha+16\eta\mu^2\alpha-24\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+9\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$
$$= \sqrt{25(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha)} = \sqrt{25} = 5$$

β) $\eta\mu\omega = \frac{A}{B} = \frac{4}{5}$. Βρίσκουμε και τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$ γιατί $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ (άρα η ω είναι στο δεύτερο τεταρτημόριο).

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Επίσης ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\varepsilon\varphi(\pi + \omega) = \varepsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3}$$

$$\sigma\varphi(\omega - \pi) = \sigma\varphi[-(\pi - \omega)] = -\sigma\varphi(\pi - \omega) = \sigma\varphi\omega = -\frac{3}{4}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$$

$$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$$

Οπότε έχουμε:

$$K = \frac{9\varepsilon\varphi(\pi + \omega) - 20\sigma\varphi(\omega - \pi)}{2\sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) - \eta\mu(-\omega)} = \frac{9 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 20 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{2 \cdot \frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)} =$$

$$= \frac{-12+15}{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}} = \frac{3}{2}$$

γ) $\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x = K = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x - \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi^2 x - 1}{\varepsilon\varphi x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$2\varepsilon\varphi^2 x - 2 = 3\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow 2\varepsilon\varphi^2 x - 3\varepsilon\varphi x - 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{3 \pm 5}{2 \cdot 2} = \begin{matrix} \frac{3+5}{4} = 2 \\ \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$\varepsilon\varphi x = 2$ γιατί $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ άρα είμαστε στο τρίτο τεταρτημόριο όπου $\varepsilon\varphi x > 0$.

Έτσι $\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = \frac{1}{2}$

Επίσης $\varepsilon\varphi x = 2 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu x$ (i)

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow (2\sigma\upsilon\nu x)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow 5\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ όμως επειδή είμαστε στο τρίτι τεταρτημόριο ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$) συνx<0 άρα $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Τέλος από σχέση (i) έχουμε: $\eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Επιμέλεια απαντήσεων: Γασπαράτος Ανδρέας