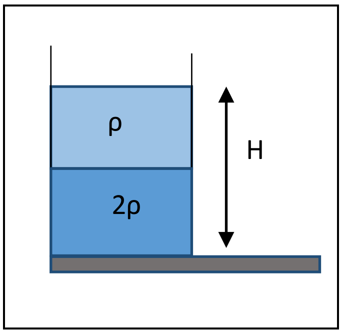
Ένας κύλινδρος ύψους Η με ελεύθερη την πάνω επιφάνεια περιέχει δύο ιδανικά υγρά που δεν αναμιγνύονται με πυκνότητες ρ το πάνω και 2ρ το κάτω με πάχος Η/2 το καθένα. Αν ανοίξουμε μια μικρή τρύπα στο κάτω κύλινδρο σε ύψος h (h<H/2) από τον πυθμένα,να υπολογίσετε:



α) Την αρχική ταχύτητα εκροής υ στην μικρή τρύπα σε συνάρτηση με το ύψος h.

β) Το βεληνεκές s του υγρού (την οριζόντια απόσταση από το σημείο εκροής που θα χτυπήσει το έδαφος)σε συνάρτηση με το ύψος h.

γ) Το ύψος h που πρέπει να γίνει η τρύπα ώστε το βεληνεκές s να είναι μέγιστο. Υπολογίστε αυτό το μέγιστο βεληνεκές.

Λύση:

α) Έστω Α ένα σημείο στην πάνω ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, Β ένα σημείο στη διαχωριστική επιφάνεια των υγρών και Γ ένα σημείο στο σημείο εκροής. Εφαρμόζω το θεώρημα του Bernoulli:

(1) στα Α και Β $P_A + \rho g H/2 + 0 = P_B$ (1)

(2) στα Β και Γ $P_B + 2\rho g H/2 + 0 = P_\Gamma + ½\, 2\rho \upsilon^2$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη της (1) και (2) και αφού $P_A = P_\Gamma = P_{ατμ}$ βρίσκω

$\upsilon = \sqrt{\frac{g(3H-4h)}{2}}$ (3)

β) έστω Δt ο χρόνος της κίνησης του νερού από το σημείο εκροής μέχρι να κτυπήσει το έδαφος. Ισχύει $h = ½\, g\Delta t^2$. Άρα $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση και τη σχέση (3) στην $s = \upsilon\Delta t$ βρίσκω

$s = \sqrt{h(3H-4h)}$ (4)

γ)**Α τρόπος** (για θετικό κλάδο).

Παραγωγίζω την προηγούμενη σχέση ως προς h και βρίσκω ότι παρουσιάζει μέγιστο για $h = 3H/8$ ίσο με $s_{max} = 3H/4$.

Β τρόπος (για κλάδο υγείας)

Υψώνοντας την (4) στο τετράγωνο και φέρνοντας όλους τους όρους στο πρώτο μέλος βρίσκω το παρακάτω τριώνυμο ως προς h.

$4h^2 – 3Hh + s^2 = 0$(5)

Επειδή η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 9H^2 – 16s^2$, πρέπει να είναι $\Delta \geq 0$ που δίνει $s \leq 3H/4$ άρα $s_{max} = 3H/4$. Αντικαθιστώντας το $s_{max} = 3H/4$ στην (5) παίρνω $h = 3H/8$.