



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$

Μονάδες 6

A2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$, δηλαδή: $(a^x)' = a^x \ln a$.

Μονάδες 5

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

(Μονάδες 3)
Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Μονάδες 10

- i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f .
- ii) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό (α, β) και υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, τότε ισχύει πάντα ότι $f(\alpha) = f(\beta)$.
- iii) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathcal{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- iv) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.
- v) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$f^2(x) = 1 - 2xf(x) \text{ για κάθε } x \in \mathcal{R}$$

A) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathcal{R}$

Μονάδες 7

B) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(f(x) + x - 1) \eta \mu \frac{1}{x} \right]$

Μονάδες 5

Γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f που είναι

$$\text{παράλληλη στην ευθεία } x + y - 2020 = 0$$

Μονάδες 6

Δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ ώστε $f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = \xi^2 f'(\xi)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x-1} & 0 < x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

Γ1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (Μονάδες 3) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$f\left(f(x) + \frac{1}{\pi}\right) = 1, \text{ έχει ακριβώς μια ρίζα. (Μονάδες 3)}$$

Μονάδες 6

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{f(x^2) - f(x)}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$xf(x) = 1 - x^2 f'(x) \text{ για κάθε } x > 0$$

Α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

Μονάδες 7

Β) Αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta$ και ισχύει $\alpha^\beta = \beta^\alpha$ να δείξετε ότι $1 < \alpha < e < \beta$

Μονάδες 6

Γ) Αν x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) ρίζες της εξίσωσης $3f(x) = 1$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } 3f'(x_0) + 3f(x_0) = 1$$

Μονάδες 6

Δ) Να δείξετε ότι $(x+1)f(x+1) - xf(x) < \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

Μονάδες 6**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**