ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α.

1)Να διατυπωθεί το κριτήριο παρεμβολής.

(Μονάδες 3)

2)Πότε ορίζεται η αντίστροφη μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ και από ποια σχέση.

(Μονάδες 5)

3)Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

(Μονάδες 7)

4)Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

α)Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

β)Μια συνάρτηση f είναι 1-1 ,αν και μόνο αν ,για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της ,η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

γ)Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσες τότε και η συνάρτηση $h = fog$ είναι γνησίως φθίνουσα.

δ)Ισχύει $|\eta\mu x| \le |x|$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε)Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$,κοντά στο x_0,τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει

$f^2(x)+2\le\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2f(x)$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (1)

α)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

(μονάδες 5)

β)Να εξετάσετε αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

(μονάδες 6)

Β2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}=3$

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}$.

(μονάδες 5)

Β3. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot f(x)\right)=2$.Να βρείτε τα όρια

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot\eta\mu x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{f(x)}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left((\sigma\upsilon\nu x-1)\cdot f(x)\right)$

(μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$f(x)>1$ και

$\ln\left(f(x)-1\right)+\ln\left(f(x)+1\right)=2x+\ln x$ για κάθε $x>0$.

α)Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{1+xe^{2x}}, x>0$

(Μονάδες 3)

β)Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 3)

γ)Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\sqrt{1+\dfrac{xe^{x}}{2}}\right)=f\left(\sqrt{1+\left(xe^{x^2}\right)^2}\right), x>0$

(Μονάδες 4)

δ)Να αποδείξετε ότι $f\left(3^x\right)+f\left(5^x\right)<f\left(4^x\right)+f\left(6^x\right)$ για κάθε $x>0$.

(Μονάδες 4)

Γ2.Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει
$(gof)(x)=x^3+3x+1, x\in\mathbb{R}$

1)Ν.δ.ο η gof είναι αντιστρέψιμη.

(Μονάδες 2)

2)Ν.δ.ο η f είναι αντιστρέψιμη.

(Μονάδες 2)

3)Να λύσετε την εξίσωση $f^3(x^3)+3f(x^3)=f^3(x)+3f(x)$

(Μονάδες 3)

4)Να βρείτε τις συναρτήσεις f,g ώστε να ισχύει
$\left(gofof\right)\left(x\right)=e^{3x}+3e^{x}+1$

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1.Έστω η συνάρτηση $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

$f(x)\geq(2-a)x-\eta\mu x$ για κάθε $x\in(-1,1)$ (1)

1)Να αποδείξετε ότι α=1.

(μονάδες 4)

2)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}$

(μονάδες 3)

Δ2.Δίνεται η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ με $A=(0,+\infty)$ και $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

1)Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.

(μονάδες 3)

2)Να βρείτε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f\left(x^2+x+1\right)-2}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)-2}$

(μονάδες 8)

Δ3. Αν για τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$

Τότε να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2f(x)+3g(x)}{f^2(x)+g^2(x)}$

(μονάδες 7)

Καλή επιτυχία!!!