ΕΥΘΕΙΑ 2

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Π. Δρακουλάκος

ΘΕΜΑ 1

Α. Αν $\beta \neq 0$, έχω $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{\delta}} = -\frac{\alpha}{\beta}$ οπότε $\varepsilon \parallel \vec{\delta}$.

Αν $\beta = 0$, πρέπει $\alpha \neq 0$. Έχω $\varepsilon: \alpha x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\gamma}{\alpha}$ οπότε $\varepsilon \parallel y'y$, και $\vec{\delta} = (0, -\alpha)$ οπότε $\vec{\delta} \parallel y'y \parallel \varepsilon$.

Άρα σε κάθε περίπτωση, το $\vec{\delta} = (\beta, -\alpha) \parallel \varepsilon$.

Έχω $\vec{\delta} \cdot \vec{v} = \beta \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta = 0$ οπότε $\vec{\delta} \perp \vec{v}$. Επομένως $\vec{v} \perp \varepsilon \left(\parallel \vec{\delta} \right)$.

(5 μονάδες)

Β. Έχω $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|\mu - \mu + 2|}{\sqrt{\mu^2 + 1}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\mu^2 + 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = 2\left(\mu^2 + 1\right) \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = \pm 1$.

Για $\mu = 1$ η $\varepsilon: x - y + 2 = 0$ και για $\mu = -1$ η $\varepsilon: -x - y + 2 = 0$.

(5 μονάδες)

Γ. <u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΙΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ</u>

1. Λ $\quad d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d\left(\text{π.χ. } A(0,1) \in \varepsilon_1, \varepsilon_2\right) = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

2. Σ $\quad \overrightarrow{BA} = (2\mu - 6,\ \mu - 3), \overrightarrow{B\Gamma} = (-2, -1)$

$$det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma}\right) = \begin{vmatrix} 2\mu - 6 & \mu - 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2\mu + 6 + 2\mu - 6 = 0 \text{ για κάθε } \mu \in \mathbb{R}.$$

Άρα, $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$ και B, A, Γ συνευθειακά.

3. Σ $\quad \overrightarrow{BA} = (\alpha + 2, \alpha + 4), \overrightarrow{B\Gamma} = (3,3), \begin{vmatrix} \alpha + 2 & \alpha + 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha + 6 - 3\alpha - 12 = -6.$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma}\right)\right| = 3.$$

4. Λ $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\alpha^2+1}{2\alpha^2}, \quad (\alpha \neq 0).$$

Άρα, $\alpha^2+1 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1.$

5. Σ Πρέπει το μέσο του AB να είναι σημείο της ε και $AB \perp \varepsilon$.

Έχω μέσο $M(0,3) \in \varepsilon$ διότι $0-3+3=0$.

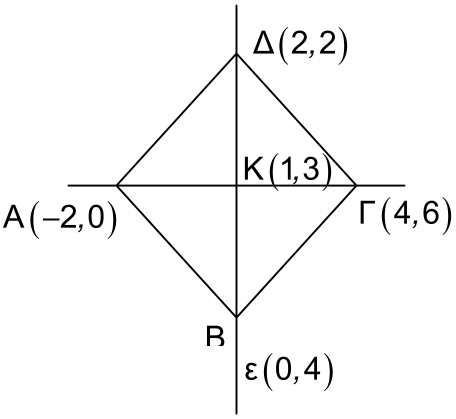
$$\lambda_{AB} = \frac{2-4}{2+2} = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_\varepsilon = 2$$

Άρα $AB \perp \varepsilon$ αφού $\lambda_{AB} \cdot \lambda_\varepsilon = -1$.

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ2

Α.



Αφού $B(0,4) \in \varepsilon$ διότι $0+4-4=0$, η ε είναι η διαγώνιος ΒΔ. Σε ρόμβο οι διαγώνιες είναι κάθετες και διχοτομούνται.

Άρα $A\Gamma \begin{cases} A(-2,0) \\ \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} = -\dfrac{1}{\lambda_\varepsilon} = 1 \end{cases}$, οπότε $A\Gamma: y = x+2$.

Το σημείο τομής των διαγωνίων, K, είναι η λύση του συστήματος των $A\Gamma$ και $B\Delta$.

Άρα $\begin{cases} A\Gamma: x-y=-2 \\ B\Delta: x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_\kappa = 1 \\ y_\kappa = 3 \end{cases}$

Αφού K μέσο του $A\Gamma$, έχω $\begin{cases} x_\kappa = \dfrac{x_A + x_\Gamma}{2} \\ y_\kappa = \dfrac{y_A+y_\Gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Gamma = 2x_\kappa - x_A = 2-(-2) = 4 \\ y_\Gamma = 2y_\kappa - y_A = 6-0 = 6 \end{cases}$

και αφού K μέσο του $B\Delta$, έχω $\begin{cases} x_\Delta = 2x_\kappa - x_B = 2-0 = 2 \\ y_\Delta = 2y_\kappa - y_B = 6-4 = 2 \end{cases}$

Άρα, $\Gamma(4,6)$ και $\Delta(2,2)$ οι ζητούμενες κορυφές.

Ισχύει $(AB\Gamma\Delta) = 2(AB\Gamma) = 2\frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = \left|det\left(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}\right)\right|$

Έχω $\overrightarrow{A\Gamma} = \left(4-(-2), 6-0\right) = (6,6)$ και $\overrightarrow{AB} = \left(0-(-2), 4-0\right) = (2,4)$.

Άρα, $\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 12 = 12$ και $(ΑΒΓΔ) = 12$.

(13 μονάδες)

Β. Έστω $M(\alpha,\beta)$. Έχω $M \in \varepsilon : \alpha + \beta - 6 = 0$ ή $\beta = 6 - \alpha$ οπότε $M(\alpha, 6-\alpha)$.

Ισχύει $(ABM) = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = 9$. Έχω $\overrightarrow{AM} = (\alpha - 1, 7 - \alpha)$ και

$\overrightarrow{AB} = (2,4)$, $\begin{vmatrix} \alpha - 1 & 7 - \alpha \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\alpha - 4 - 14 + 2\alpha = 6\alpha - 18$.

Άρα $|6\alpha - 18| = 18 \Leftrightarrow 6\alpha = 18 \pm 8 \Leftrightarrow \begin{cases} + : \alpha = 6 \\ - : \alpha = 0 \end{cases}$.

Για $\alpha = 0$ το $M(0,6)$ και για $\alpha = 6$ το $M(6,0)$.

(12 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3

Α. Έχω $6y^2 - (x+3)y - (x^2 + x) = 0$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας ως προς y εξίσωσης είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= (x+3)^2 + 24(x^2 + x) = \\ &= x^2 + 6x + 9 + 24x^2 + 24x = 25x^2 + 30x + 9 = \\ &= (5x+3)^2. \end{aligned}$$

Άρα $y = \dfrac{x + 3 \pm (5x+3)}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} + : y = \dfrac{6x+6}{12} & ή \quad y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}. \\ - : y = \dfrac{-4x}{12} & ή \quad y = -\dfrac{1}{3}x. \end{cases}$

Άρα η εξίσωση παριστάνει τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{3}x$.

(8 μονάδες)

Έχω $\theta = \left(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}\right) = \left(\widehat{\delta_1, \delta_2}\right)$ με $\varepsilon_1 \parallel \overrightarrow{\delta_1} = (2,1)$ και $\varepsilon_2 \parallel \overrightarrow{\delta_2} = (3,-1)$.

Άρα, $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\delta_1 \cdot \delta_2}{\left|\overrightarrow{\delta_1}\right|\left|\overrightarrow{\delta_2}\right|} = \dfrac{6-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και η $\theta = 45^\circ$.

(5 μονάδες)

Β.

(α) $\left.\begin{array}{l} A=\mu+2,\ A=0 \text{ για } \mu=-2 \\ B=3-\mu,\ B=0 \text{ για } \mu=3 \end{array}\right\}$ Άρα, δεν υπάρχει $\mu\in\mathbb{R}: A=B=0$

και η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow(x-y+4)\mu+(2x+3y+2)=0$

Αναζητώ x,y που επαληθεύουν την εξίσωση για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$, δηλαδή την λύση του συστήματος $\begin{cases} x-y+4=0 \\ 2x+3y+2=0 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3+2=5,\ D_x=\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-12-2=-14,\ D_y=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=6.$

Άρα $x=-\frac{14}{5},\ \ y=\frac{6}{5}$ και όλες οι ευθείες διέρχονται από το $T\left(-\frac{14}{5},\frac{6}{5}\right)$.

(6 μονάδες)

(β) Όταν $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \ \in\varphi\theta>0.$

Αλλά, $\in\varphi\theta=\lambda_\varepsilon=-\frac{\mu+2}{3-\mu},\ \ \mu\neq3.$

Άρα, $-\frac{\mu+2}{3-\mu}>0\Leftrightarrow(\mu+2)(\mu-3)>0$

που ισχύει για $\mu<-2$ και $\mu>3$.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4

Α. Η ζητούμενη ευθεία ε έχει εξίσωση $y=\lambda x+2$ με λ άγνωστο, ή μπορεί να είναι και η $x=x_A=0$.

- Ελέγχω την $\varepsilon: x=0$.

  $\varepsilon\parallel\vec{\delta}=(0,1),\ \ \zeta\parallel\vec{\zeta}=\left(3,\sqrt{3}\right),$

  $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\varepsilon,\zeta}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta},\vec{\zeta}}\right)=\frac{\vec{\delta}\cdot\vec{\zeta}}{|\vec{\delta}||\vec{\zeta}|}=\frac{\sqrt{3}}{1\cdot\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9+3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu60^\circ$

  Άρα, η $x=0$ μία από τις ζητούμενες ευθείες.

- Αναζητώ το λ έτσι ώστε $\left(\widehat{\varepsilon,\zeta}\right)=60^\circ$ με $\varepsilon: y=\lambda x+\delta$.

  $\varepsilon \parallel \vec{\delta}=(1,\lambda)$, $\zeta \parallel \vec{\zeta}=\left(3,\sqrt{3}\right)$ και

  $$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\varepsilon,\zeta}\right)=\frac{\vec{\delta}\cdot\vec{\zeta}}{\left|\vec{\delta}\right|\left|\vec{\zeta}\right|}=\frac{3+\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}\cdot\sqrt{12}}=\frac{3+\sqrt{3}\lambda}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{1}{2}.$$

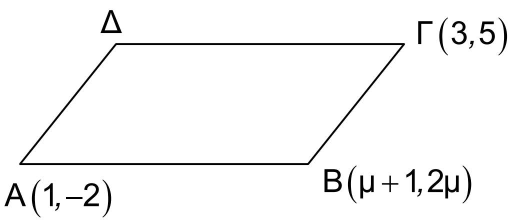
  Άρα, $\left(3+\sqrt{3}\lambda\right)^2=3\cdot\left(1+\lambda^2\right)\Leftrightarrow 9+6\sqrt{3}\lambda+3\lambda^2=3+3\lambda^2 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα η 2^η από τις ζητούμενες ευθείες είναι η

  $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$.

(12 μονάδες)

Β.



(α) Έστω $\Delta\left(x_\Delta,y_\Delta\right)$. Ισχύει: $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x_\Delta-1,y_\Delta+2\right)=\left(2-\mu,5-2\mu\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Delta-1=2-\mu\\ y_\Delta+2=5-2\mu\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Delta=3-\mu\\ y_\Delta=3-2\mu\end{cases}$$

Άρα, $\Delta\left(3-\mu,3-2\mu\right)$

(3 μονάδες)

(β) Έχω $\begin{cases}x_\Delta=3-\mu, & (1)\\ y_\Delta=3-2\mu, & (2)\end{cases}$ Απαλείφοντας το μ θα προκύψει η εξίσωση της γραμμής στην οποία βρίσκεται το Δ.

$(1): \mu=3-x_\Delta\rightarrow(\varepsilon): y_\Delta=3-2\left(3-x_\Delta\right)\Leftrightarrow y_\Delta=2x_\Delta-3$.

Άρα, το Δ βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $y=2x-3$.

(5 μονάδες)

(γ) Έχω $\left(AB\Gamma\Delta\right)=2\left(AB\Gamma\right)=2\dfrac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=8$.

Αλλά, $\overrightarrow{AB} = (\mu, 2\mu + 2)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (2,7)$ οπότε

$$det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) = \begin{vmatrix} \mu & 2\mu + 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7\mu - 4\mu - 4 = 3\mu - 4.$$

Επομένως, έχω: $|3\mu - 4| = 8 \Leftrightarrow 3\mu - 4 = \pm 8 \Leftrightarrow \begin{cases} + : \mu = 4 \\ - : \mu = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

Για $\mu > 0$, $\mu = 4$ οπότε $\Delta(-1, -5)$.

(5 μονάδες)