Προτεινομενα Κλασσικα
Θεματα Κυκλου

Π. Δρακουλακος

1. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου, C, του τριγώνου ΑΒΓ με $A(1,-1), B(6,4)$ και $\Gamma(-2,0)$.

   Να βρείτε, επίσης, τις εξισώσεις των εφαπτομένων του C στα Α και Β και Γ.

   Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το κέντρο του C και αποκόπτει από την ευθεία $\varepsilon: 3x+4y-10=0$ χορδή μήκους 6 μονάδων;

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που εφάπτεται με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και με την ευθεία $\varepsilon: y = x-\sqrt{2}$.

   Να βρείτε, επίσης, τις εξισώσεις των εφαπτομένων του C που είναι κάθετες στην ευθεία $j: 4x-3y=0$.

3. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2-6x+7=0$. Από το $M(5,0)$ φέρονται οι εφαπτόμενες του κύκλου και έστω A, B τα σημεία επαφής. Αν K το κέντρο του κύκλου,

   (i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ΜΑ, ΜΒ

   (ii) Να δείξετε ότι το ΚΑΜΒ είναι τετράγωνο

4. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες $\varepsilon_1 : x - y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y - 7 = 0$ και διέρχεται από το $\mathrm{A}(1, -2)$.

5. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x + \mu y - 10 = 0$ και ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 1 + \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες

η ε (i) τέμνει τον κύκλο,

(ii) εφάπτεται με τον κύκλο,

(iii) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο.

6. Δίνεται ο κύκλος $c : x^2 + y^2 = \rho^2 \quad (\rho > 0)$, και σημείο $\mathrm{M}(\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ \rho\eta\mu\theta)$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

(α) Να δείξετε ότι το Μ είναι σημείο του κύκλου C

(β) Η εφαπτομένη του C στο Μ τέμνει τον $x'x$ στο Α και τον $y'y$ στο Β. Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΑΒ έχει ελάχιστη τιμή το ρ^2.

(γ) Αν $\rho = \sqrt{2}$ ποιες είναι οι συντεταγμένες του Μ για τις οποίες το Ε έχει την ελάχιστη τιμή του;

7. Δίνεται ο κύκλος $c : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση του συμμετρικού του C, κύκλου C', ως προς κέντρο συμ/ας το $0(0,0)$.

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των C και C'.

8. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + ax + \beta y + a - 2 = 0, \quad (1), a, \beta \in \mathbb{R}.$$

(α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $\beta = \sqrt{3}\alpha$,

(i) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία βρίσκονται τα κέντρα όλων των κύκλων με εξίσωση την (1),

(ii) Να βρείτε την μικρότερη τιμή που μπορεί να έχει η ακτίνα κύκλου με εξίσωση την (1).

(γ) Αν η ευθεία $\varepsilon : y = 1$ εφάπτεται στους κύκλους με εξίσωση (1),

(i) Να δείξετε ότι $(\alpha - 2)^2 = 4\beta$

(ii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου έτσι ώστε το κέντρο του να είναι πάνω στον $x'x$.

(δ) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με εξίσωση την (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία των οποίων ζητούνται οι συντεταγμένες