ΚΥΚΛΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1. Έστω $K\ (\alpha,\beta)$ το κέντρο και ρ η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου C.

Έχω: $d(K,\varepsilon_1\ ) = d(K,\varepsilon_2) = \ (OK) = \rho \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cdots \begin{cases} \alpha = 2, \beta = 2, \rho = 2\sqrt{2} \\ \alpha = -2, \beta = -2, \rho = 2\sqrt{2} \end{cases}$$ οπότε:

$C_1: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ και $C_2: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 8$

2. Έστω $K\ (\alpha,\beta)$ το κέντρο και ρ η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου C.

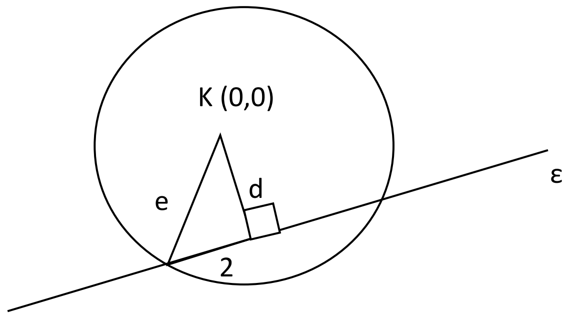
$$\text{Έχω} \begin{cases} (AK) = (BK) \\ K \in J \begin{cases} A \Leftrightarrow \cdots \alpha = 0, \beta = 1\ \kappa\alpha\iota\ \rho = \sqrt{2} \\ \perp \varepsilon: \upsilon = -\chi + 3 \end{cases} \end{cases}$$

οπότε $C: x^2 + (y-1)^2 = 2$.

Παρατηρώ ότι το $\Gamma(0,3) \in \varepsilon$, οπότε η ε είναι μία από τις ζητούμενες εφαπτόμενες. Επειδή επιπρόσθετα το $\Gamma \in y'y$ που είναι άξονας συμμετρίας του C, η άλλη εφαπτομένη θα είναι η συμμετρική της ε ως προς την $y'y$, δηλαδή η $y = x + 3$.

(Φυσικά οι εφαπτόμενες μπορούν να βρεθούν και με την γενική μέθοδο).

3.



$\rho^2 = d^2 + 4$ όπου $d = d(K, \varepsilon) = 1$.

Άρα, $C: x^2 + y^2 = 5$.

Οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι $\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$

4. Ουσιαστικά, είναι η εύρεση των κοινών εφαπτομένων του $C: x^2 + y^2 = 4$ και του

$C_1 \begin{cases} Κέντρο\ x\ A(-2,0) \\ ακτίνα\ \rho = 1 \end{cases} \to (x+2)^2 + y^2 = 1.$

Με την κλασσική διαδικασία, προκύπτουν οι $\varepsilon_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ και

$\varepsilon_2: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

5. Έχω $N(\beta, \alpha)$.

$M \in C$. Άρα $(\alpha - 2)^2 + \beta^2 = 1$, (1)

Ισχύει $(OMN) = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)\right| = \frac{1}{2}|\alpha^2 - \beta^2|$, (2)

(1): $\beta^2 = -\alpha^2 + 4\alpha - 3 \to$ (2): $2(OMN) = |2\alpha^2 - 4\alpha + 3|$

και επειδή $2\alpha^2 - 4\alpha + 3 > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,

έχω: $2(OMN) = 2\alpha^2 - 4\alpha + 3$.

Για $(OMN) = \frac{9}{2}$ προκύπτει $\begin{cases} \alpha = 3, \rho = 0 \\ \alpha = -1, \beta^2 = -7\ (αδύνατο) \end{cases}$

Άρα $M(3,0)$.

6. **(α)** Ο περιορισμός ύπαρξης κύκλου ισχύει για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

(β) Έχω $\begin{cases} x_\kappa = \mu \\ y_\kappa = 3\mu \end{cases}$ Άρα $y_\kappa = 3x_\kappa$ οπότε γ.τ. του Κ είναι η ευθεία $y = 3x$ με εξαίρεση το σημείο της $0(0,0)$ αφού $\mu \neq 0$.

(γ) Έχω $d(K(\mu, 3\mu), \varepsilon\colon 3x - 4y + 24 = 0) = \rho = 3|\mu|$.

Προκύπτουν οι $C_1\colon x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$
$C_2\colon x^2 + y^2 + 8x + 24y + 16 = 0$.

7. **(α)** Ο περιορισμός ύπαρξης κύκλου ισχύει για κάθε $n \in N^*$
Κέντρο το $K(1+n, n)$ και ακτίνα $\rho = n\sqrt{2}$.

(β) Το σημείο με συν/νες που επαληθεύουν την εξίσωση για κάθε n είναι το $A(1,0)$.

(γ) Αφού $A(1,0) \in \varepsilon$ και $A \in$ όλους τους κύκλους, αρκεί $d(K, \varepsilon) = \rho$ που ισχύει ή αρκεί η $KA \perp \varepsilon$, που επίσης ισχύει.

8. **Α.** Ο Περιορισμός ύπαρξης κύκλου: $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ ισχύει για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ αφού $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 8$ (> 0). Άρα, κύκλος με $K\,(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}$.

Β. Για $\theta = \frac{\pi}{2}$ το $K(0,1)$. Η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΜ άρα, $\lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{1}{\lambda_{KM}} = -1$, επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης $\varepsilon \begin{cases} M(1,2) \\ \lambda = -1 \end{cases}$ είναι $y - 2 = -(x - 1)$ ή $y = -x + 3$.

Γ. Για κάθε θ έχω $\begin{cases} x_K = \sigma\upsilon\nu\theta \\ y_K = \eta\mu\theta \end{cases}$ οπότε το $K \in$ κύκλο: $x^2 + y^2 = 1$ (μοναδιαίος κύκλος).

9. Α. Η εξίσωση έχει μορφή γενικής εξίσωσης κύκλου $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = 6\mu, B = 8\lambda, \Gamma = 0$. Ισχύει $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36\mu^2 + 64\lambda^2 > 0$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$. Άρα, αφού ισχύει ο περιορισμός ύπαρξης κύκλου, είναι εξ. κύκλου για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$. Για $x = y = 0$ η εξ. επαληθεύεται. Άρα, όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το $O(0,0)$.

Β. α. Για κάθε $K(X_K, Y_K)$ κέντρο κύκλου που ορίζεται από την εξ.
Έχω$\begin{cases} X_{K=-\frac{A}{2}=-3\mu=2\lambda} \\ y_K = -\frac{B}{2} = -4\lambda \end{cases}$ Απαλείφοντας το λ, έχω: $Y_K = -2X_K$. Άρα όλοι οι κύκλοι έχουν τα κέντρα τους στην ευθεία $y = -2x$ που διέρχεται από το $O(0,0)$.

β. Αφού Α, Β, Ο είναι σημεία του κύκλου και ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$, η $AB: x + y + 2 = 0$ είναι διάμετρος. Άρα $K(2\lambda, -4\lambda) \in AB: 2\lambda - 4\lambda + \varepsilon = 0$ δηλ. $\lambda = 1$ και αφού $\mu = -\frac{2\lambda}{3}, \mu = -\frac{2}{3}$.

γ. $(AOB) = \frac{1}{2}(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta)(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma) = \frac{1}{2}(AB)d(0, AB)$. Έχω $(AB) = 2\rho = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{36\mu^2 + 64\lambda^2} = \sqrt{36 \cdot \frac{4}{9} + 64} = \sqrt{80}$.
$d(0, AB) = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Άρα, $(AOB) = \frac{1}{2}\sqrt{80} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2}4\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$.

10. Α. Για κάθε $M(x, y)$ που ανήκει στον γεωμετρικό τόπο, ισχύει:
$(AM) = \sqrt{2}(BM) \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 2(x^2 + y^2 - 4y + 4) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$.

Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C με κέντρο $K(2,4)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{16+64-16} = 4$. Άρα γεωμετρικός τόπος του Μ είναι ο κύκλος C $(K(2,4), \rho = 4)$.

Β. Για κάθε $M(X_M, Y_M)$, μέσο του ΑΒ, ισχύει:

$X_M = \frac{X_A+X_B}{2} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\theta-2}{2} = \sigma\upsilon\nu\theta - 1$, (1).

$Y_M = \frac{Y_A+Y_B}{2} = \frac{4+2\eta\mu\theta}{2} = 2+\eta\mu\theta$, (2).

Επίσης, για κάθε θ ισχύει: $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$, (3).

Απαλείφοντας το θ από τις (1), (2) και (3) θα προκύψει η εξ. της γραμμής στην οποία βρίσκεται το Μ.

$$\left.\begin{aligned} \text{Έχω (1): } & \sigma\upsilon\nu\theta = X_M + 1 \\ \text{(2): } & \eta\mu\theta = Y_M - 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{(3): } (X_M+1)^2 + (Y_M-2)^2 = 1.$$

Άρα, το $M \in$ κύκλο C: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ που έχει κέντρο το $K(-1,2)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Επομένως, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο C$(K(-1,2), \rho = 1)$.

11. Η (1) έχει μορφή γενικής εξίσωσης κύκλου $x^2 + y^2 + A_x + B_y + \Gamma = 0$ με $A = -2|\vec{\alpha}|, B = -|\vec{\beta}|$ και $\delta = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$.

(α) Για να παριστάνει κύκλο, πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

Έχω $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| = 3|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| = 3|\vec{\alpha}|^2 + (|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|)^2$ που είναι > 0 αφού $3|\vec{\alpha}|^2 > 0$ και $(|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|)^2 \geq 0$. Άρα, η (1) παριστάνει κύκλο. Το κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ είναι το $\left(|\vec{\alpha}|, \frac{|\vec{\beta}|}{2}\right)$ και η ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{4|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$.

(β) Αν ο (1) έχει κέντρο το $K(1,1)$, έχω $|\vec{\alpha}| = 1$ $KM \frac{|\vec{\beta}|}{2} = 1$ δηλ. $|\vec{\beta}| = 2$, οπότε η ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{4+4-2\cdot1\cdot2} = 1$. Η ε είναι η $3x+4y-6=0$. Για να δείξω ότι ο κύκλος εφάπτεται στην ε, αρκεί να δείξω ότι $d(K(1,1), \varepsilon: 3x+4y-12=0) = \rho = 1$. Έχω, $d(K,\varepsilon) = \frac{|3+8-16|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-5|}{5} = 1$.

12. Έστω $K(\alpha,\beta)$ το κέντρο και ρ η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου. Έχω $K \in \varepsilon: \beta = \frac{1}{2}\alpha$, (1) και $(AK) = d(K, x'x)$ $(=\rho)$, (2).

(2): $\sqrt{(\alpha-14)^2+(\beta-2)^2} = |\beta|$.

(1): $\alpha = 2\beta \to$ (2): $\sqrt{(2\beta-14)^2+(\beta-2)^2} = |\beta| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\beta^2+196-56\beta+\beta^2-4\beta+4 = \beta^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\beta^2-60\beta+200 = 0 \Leftrightarrow \beta^2-15\beta+50 = 0$.

Άρα, $\beta = \frac{15\pm\sqrt{15^2-4\cdot50}}{2} = \frac{15\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{15\pm5}{2}\begin{cases}10\\5\end{cases}$

- Για $\beta = 10, \alpha = 20$ (1) και $\rho = 10$ (2).
  Άρα ο $C_1: (x-20)^2+(y-10)^2 = 100$.
- Για $\beta = 5, \alpha = 10$ και $\rho = 5$.
  Άρα ο $C_2: (x-10)^2+(y-5)^2 = 25$.

Επειδή $|\rho_1-\rho_2| = 5 < (K_1K_2) = \sqrt{10+25} = 5\sqrt{5} < \rho_1+\rho_2$

$=15$, οι κύκλοι τέμνονται, οπότε υπάρχουν δύο κοινές εφαπτομένες από τις οποίες η μία είναι ο $x'x: y=0$.

*** <u>Εύρεση της 2ης κοινής εφαπτομένης (Γενικός Τρόπος)</u>**

Έστω $\zeta: y = \lambda x+\beta$ η μορφή της εξίσωσης της κοινής εφαπτομένης. Έχω $\lambda(K_1,\zeta) = \rho_1 \Leftrightarrow \frac{|20\lambda+\beta-10|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 10$, (3) και $\frac{|10\lambda+\beta-5|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 5$, (4). Άρα (3): $\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{|20\lambda+\beta-10|}{10}$ και (4): $\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{|10\lambda+\beta-5|}{5}$. Επομένως, $\frac{|20\lambda+\beta-10|}{10} = \frac{|10\lambda+\beta-15|}{5} \Leftrightarrow$ $|20\lambda+\beta-10| = |20\lambda+2\beta-10| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} +: \beta = 0, & (5)\\ -: 40\lambda+3\beta-20 = 0, & (5)' \end{cases}$$

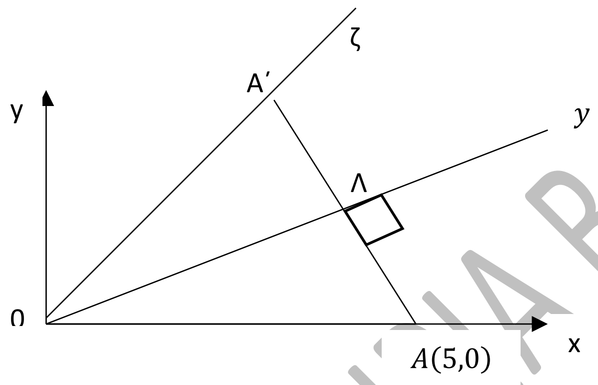
$\Sigma_1 \begin{cases}(5)\\(4)\end{cases}$ (5)→ (4): $\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{5|2\lambda-1|}{5} \Leftrightarrow 1+\lambda^2 = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1.$

$\Leftrightarrow \lambda(3\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 0\\ \lambda = \dfrac{4}{3}\end{cases}$

Άρα, με $\beta = 0$ και $\lambda = \frac{4}{3}$ η ζ_2: $y = \frac{4}{3}x$ (η 2η κοινή εφαπτομένη).

Το $\Sigma_2 \begin{cases}(5)'\\(4)\end{cases}$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$.

* **<u>2ος τρόπος, ειδικά γι' αυτήν την άσκηση</u>**



Η διάκεντρος K_1K_2: (ε): $y = \frac{1}{2}x$, είναι άξονας συμμετρίας των δυο κοινών εφαπτομένων. Άρα, η 2η κοινή εφαπτομένη ζ είναι η συμμετρική της πρώτης, $y = 0$, ως προς την ε: $y = \frac{1}{2}x$.

Προσδιορίζω δυο σημεία της ζ. Ένα είναι το σημείο τομής της ε με τον $x'x$, δηλ. το $0(0,0)$. Ένα δεύτερο σημείο θα είναι το συμμετρικό τυχαίου Α π.χ. $(5,0)$ της $y = 0$ ως προς την $y = \frac{1}{2}x$, σημείο Α΄.

Η $AA' \begin{cases} A(5,0)\\ \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{AA'} = -2\end{cases} \rightarrow AA'$: $y - 0 = -2(x-5)$

ή $y = -2x + 10$.

$\Lambda \begin{cases} AA'\colon y = -2x+10\\ \varepsilon\colon y = \frac{1}{2}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X_\Lambda = 4\\ Y_\Lambda = 2\end{cases}$ Αφού Λ μέσο AA', έχω:

$\begin{cases} X_{A'} = 2X_{\Lambda} - X_{A} = 8 - 5 = 3 \\ Y_{A'} = 2Y_{\Lambda} - Y_{\Lambda} = 4 - 0 = 4 \end{cases}$ Άρα, $A'(3,4)$

οπότε $\lambda_{OA'} = \lambda_{\zeta} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$ και η $\zeta: y = \frac{4}{3}x$.

13. Έχω $K(-4,-1)$ και $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{64+4+32} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$.

$(KM) = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} > \rho = 5$. Άρα, το M είναι έξω από τον κύκλο και φέρονται, πράγματι, δύο εφαπτόμενες από αυτό.

(α) Έστω $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ η μορφή της εξίσωσης της ζητούμενης εφαπτομένης.

Έχω $d(K,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|-4\lambda+1+\beta|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 5$, (1)

Με ε: $-8 = 3\lambda + \beta$, (2).

(2): $\beta = 3\lambda - 8 \to (1)$: $|-4\lambda + 1 + 3\lambda - 8| = 5\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |-\lambda - 7| = 5\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow \lambda^2 + 14\lambda + 49 = 25 + 25\lambda^2 \Leftrightarrow$

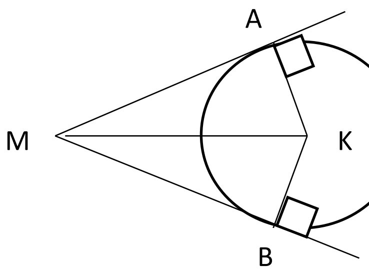
$\Leftrightarrow 24\lambda^2 - 14\lambda - 24 = 0 \Leftrightarrow 12\lambda^2 - 7\lambda - 12 = 0$.

Διακρίνουσα, $\Delta = 49 + 4 \cdot 12 \cdot 12 = 49 + 576 = 625 = (25)^2$.

Άρα, $\lambda = \frac{7 \pm 25}{24} \begin{cases} \frac{32}{24} = \frac{4}{3} \\ -\frac{18}{24} = -\frac{3}{4} \end{cases}$

- Για $\lambda = \frac{4}{3}$, (2): $\beta = 3 \cdot \frac{4}{3} - 8 = -2$ και η $\varepsilon_1: y = \frac{4}{3}x - 2$, (MA).
- Για $\lambda = -\frac{3}{4}$, (2): $\beta = -3 \cdot \frac{3}{4} - 8 = -\frac{41}{4}$ και η $\varepsilon_2: y = -\frac{3}{4}x - \frac{41}{4}$, (MB).

(β)



Ισχύει $(AM) = (MB) = \sqrt{(KM)^2 - \rho^2} = \sqrt{50-25} = 5$.

Η άσκηση, λίγο πιο κουραστικά, θα μπορούσε να λυθεί βρίσκοντας και τα Α, Β. Το απέφυγα αφού δεν ζητούνται οι συντεταγμένες της.

14. Οι κορυφές του τριγώνου είναι τα $0(0{,}0)$, $A(4{,}0)$ και $B(0{,}3)$. Το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου, έστω ότι το $K(\alpha,\beta)$ είναι μέσα στο τρίγωνο. Άρα $0<\alpha<4$ και $0<\beta<3$. Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου.

Έχω: $d(K, x'x\colon y=0) = d(K, y'y\colon x=0) = d(K,\varepsilon)(=\rho)$.

Άρα, $|\beta| = |\alpha| = \frac{|3\alpha+4\beta-12|}{5}$.

- $|\beta| = |\alpha| \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\alpha, \ \ (1) \\ \beta=-\alpha, απορρίπτεται\ αφού\ \alpha>0\ και\ \beta>0 \end{cases}$
- $|3\alpha+4\beta-12| = 5|\alpha| \Leftrightarrow \begin{matrix} +: \\ -: \end{matrix}\begin{cases} 3\alpha+4\beta-12=5\alpha \\ 3\alpha+4\beta-12=-5\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -2\alpha+4\beta-12=0 \text{ ή } -\alpha+2\beta-6=0, (3) \\ 8\alpha+4\beta-12=0 \text{ ή } 2\alpha+\beta-3=0, \qquad (3)' \end{cases}$

$\Sigma_1\begin{cases} (1)\ \beta=\alpha \\ (3)\ -\alpha+2\beta-6=0 \end{cases} \rightarrow \alpha=\beta=6$ απορρίπτεται αφού

$0<\alpha<4$

$0<\beta<3$

$\Sigma_2\begin{cases} (1)\ \beta=\alpha \\ (3)'\ 2\alpha+\beta-3=0 \end{cases} \rightarrow \alpha=\beta=1$. Δεκτή λύση.

Άρα $K(1{,}1), \rho=|\alpha|=1$ και ζητούμενος εγγεγραμμένος κύκλος είναι ο : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

15. Παρατηρώ ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ. Είναι γνωστό ότι στα ορθογώνια τρίγωνα ο περιγεγραμμένος κύκλος έχει διάμετρο την υποτείνουσα. Άρα, το κέντρο Κ ως μέσο της ΑΒ είναι το $K(4{,}3)$ και η ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}(AB)=\frac{1}{2}\sqrt{64+36}=5$. Επομένως, ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση: $C\colon (x-4)^2+(y-3)^2=25$.

Έστω Μ τυχαίο σημείο του γ.τ.

Αφού το Μ είναι μέσο χορδής που διέρχεται από το $\Gamma(2-1)$, το ΚΜ ως «απόστημα» είναι κάθετο στο ΓΜ.

Άρα, $\widehat{KM\Gamma} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow M \in$ κύκλο με σιάμετρο την ΚΓ. Κέντρο του κύκλου, $\Lambda\left(\frac{X_K+X_\Gamma}{2}, \frac{Y_K+Y_\Gamma}{2}\right)$ δηλ. $\Lambda(3,1)$ και ακτίνα του κύκλου $R = \frac{1}{2}(K_\Gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{4+16} = \sqrt{5}$. Άρα, γεωμετρικός τόπος του Μ είναι ο κύκλος C_1 με εξίσωση $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

*Στον γεωμετρικό τόπο ανήκουν όλα τα σημεία του C_1 διότι το Γ είναι μέσα στον C $\left((K\Gamma) = 2\sqrt{5} < 5\right)$.

16. Ο $C: x^2 + y^2 - x - 2 = 0$ έχει κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{3}{2}$.

Ισχύει $d(K, \varepsilon: 5x + 3y + 2 = 0) = \frac{\left|\frac{5}{2}+2\right|}{\sqrt{34}} = \frac{9}{2\sqrt{34}} = \frac{9\sqrt{34}}{68} < \frac{3}{2}$

Άρα, πράγματι η ε τέμνει τον C σε δυο σημεία Μ, Ν.

Η $x^2 + y^2 + (5\mu - 1)x + 3\mu y + 2\mu - 2 = 0$, (1), έχει μορφή γενικής εξίσωσης κύκλου $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = 5\mu - 1$, $B = 3\mu$, $\Gamma = 2\mu - 2$.

Θα παριστάνει κύκλο αν και μόνον αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

Έχω: $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (5\mu - 1)^2 + 9\mu^2 - 4(2\mu - 2) =$

$= 25\mu^2 - 10\mu + 1 + 9\mu^2 - 8\mu + 8 =$

$34\mu^2 - 18\mu + 9$.

Το τρίγωνο έχει θετικό συντελεστή στο μ^2 και διακρίνουσα

$\Delta = 18^2 - 4 \cdot 9 \cdot 34 = 324 - 1224 = -900$, άρα είναι θετικό για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

Επομένως, αφού $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

$(1) \Leftrightarrow (5x + 3y + 2)\mu + (x^2 + y^2 - x - 2) = 0$.

Οι συντεταγμένες των σημείων που επαληθεύουν την εξ. για κάθε μ, είναι οι λύσεις του συστήματος των εξ. $\begin{cases} 5x + 3y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$

δηλ. είναι τα κοινά σημεία Μ και Ν της ε και του C.

Άρα, όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από τα Μ και Ν.