Λύση

$g(x) = xlnx - lnx$

α. $D_g = (0, +\infty)$ $\quad g$ συνεχής και παραγωγίσιμη με $g'(x) = lnx + 1 - \frac{1}{x}$

Η g' συνεχής για κάθε $x > 0$ και παραγωγίσιμη με $g''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

άρα g' γνησίως αύξουσα.

$$\begin{cases} D_{g'} = (0, +\infty) \\ g'\, συνεχής\; και\; γνησίως\; αύξουσα \end{cases} \quad g'(D_{g'}) = \left(\lim_{x\to 0} g'(x), \lim_{x\to +\infty} g'(x)\right)$$

$$g'(D_{g'}) = (-\infty, +\infty)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(lnx + 1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \qquad \left(άρα \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\right) \\ \lim\limits_{x\to +\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(lnx + 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty - 0 = +\infty \end{cases}$$

Εφόσον η g' είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 άρα ορίζεται η g^{-1} με $D_{g^{-1}} = (-\infty, +\infty)$.

β. $eg'(xlnx - 2016x + e - 1) + 1 = 2e \iff$

$$\iff g'(xlnx - 2016x + e - 1) = \frac{2e-1}{e} \iff g'(xlnx - 2016x + e - 1) = g'(e)$$

$$\overset{g'\,1-1}{\iff} xlnx - 2016x + e - 1 = e \iff xlnx - 2016x - 1 = 0$$

$$lnx - 2016 - \frac{1}{x} = 0 \iff lnx - \frac{1}{x} + 1 = 2017 \iff g'(x) = 2017$$

$$2017 \in g'(D_{g'}) = (-\infty, +\infty)$$

Άρα υπάρχει $\rho \in D_{g'}$ ΄τέτοιο ώστε $g'(\rho) = 2017$

Και καθώς η g' είναι γνησίως αύξουσα, το ρ είναι μοναδικό.

γ. Θέτουμε $h = g'$ οπότε $h^{-1} = (g')^{-1}$

$$\begin{cases} D_{h^{-1}} = (-\infty, +\infty) \\ h^{-1} \ \ συνεχής \\ h^{-1}\ γν.αύξουσα\ (όπως\ h = g') \end{cases} \qquad h^{-1}(D_{h^{-1}}) = \left(\lim_{x\to-\infty} h^{-1}(x), \lim_{x\to+\infty} h^{-1}(x)\right)$$

$$όμως\ \ h^{-1}(D_{h^{-1}}) = D_h = (0, +\infty)$$

$$\text{Άρα } \lim_{x\to-\infty} h^{-1}(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} h^{-1}(x) = +\infty$$

i. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(g'(x)\right)^{-1} + x}{3\left(g'(x)\right)^{-1} + 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{h^{-1}(x) + x}{3h^{-1}(x) + 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{h^{-1}(x)}{x} + 1\right)}{x\left(3\frac{h^{-1}(x)}{x} + 2\right)} = \frac{0+1}{3\cdot 0 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{h^{-1}(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to-\infty} h^{-1}(x) = 0 \cdot 0 = 0\right)$$

ii. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(g'(x)\right)^{-1} + e^x + 1}{2^x + 4^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{h^{-1}(x) + e^x + 1}{2^x + 4^x} = +\infty$$

αφού $\lim_{x\to-\infty} (h^{-1}(x) + e^x + 1) = \lim_{x\to-\infty} h^{-1}(x) + \lim_{x\to-\infty} (e^x + 1) = 0 + 1 = 1$

και $\lim_{x\to-\infty} (2^x + 4^x) = 0\,, \qquad 2^x + 4^x > 0\,,\ \ x \in \mathbb{R}$

iii. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(g'(x)\right)^{-1} + 6x}{3\left(g'(x)\right)^{-1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{h^{-1}(x) + 6x}{3h^{-1}(x) + x} =$$

(θέτουμε $y = h^{-1}(x) \;\; \Leftrightarrow \;\; x = h(y)$)

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{6h(y)+y}{h(y)+3y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{6\left(lny-\frac{1}{y}+1\right)+y}{lny-\frac{1}{y}+1+3y} = \qquad \left\{\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} h^{-1}(x) = +\infty\right\}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{6lny - \frac{6}{y} + 6 + y}{lny - \frac{1}{y} + 1 + 3y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y\left(\frac{6lny}{y} - \frac{6}{y^2} + \frac{6}{y} + 1\right)}{y\left(\frac{lny}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 3\right)} = \frac{6\cdot 0 - 0 + 0 + 1}{0 - 0 + 0 + 3} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\lim_{y\to+\infty} \frac{lny}{y} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\Rightarrow} \lim_{y\to+\infty} \frac{(lny)'}{y'} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\frac{1}{y}}{1} = 0\right)$$

iv. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e\left(g'(x)\right)^{-1}}{2+\eta\mu x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{eh^{-1}(x)}{2+\eta\mu x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{\frac{2}{h^{-1}(x)}+\frac{\eta\mu x}{h^{-1}(x)}} = +\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{h^{-1}(x)} = 0$$

$$\left(\text{μη ξεχνάμε} \lim_{x\to+\infty} h^{-1}(x) = +\infty\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{h^{-1}(x)} = 0$$

$$\left(\left|\frac{\eta\mu x}{h^{-1}(x)}\right| \le \frac{1}{|h^{-1}(x)|} \;\; \Leftrightarrow \;\; -\frac{1}{|h^{-1}(x)|} \le \frac{\eta\mu x}{h^{-1}(x)} \le \frac{1}{|h^{-1}(x)|} \;\; , \;\; x \in \mathbb{R}\right)$$

$$\left(\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|h^{-1}(x)|} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{|h^{-1}(x)|}\right) = 0 \end{cases} \qquad \text{άρα} \lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{h^{-1}(x)} = 0 \right)$$

Επίσης $-1 \le \eta\mu x \le 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; 1 \le 2 + \eta\mu x \le 3$

άρα $2+\eta\mu x>0$ καθώς $h^{-1}(D_{h^{-1}})=(0,+\infty)$ άρα $h^{-1}(x)>0$

άρα $\frac{2+\eta\mu x}{h^{-1}(x)}>0$

δ. $g''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

$g''(e)=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}=\frac{e+1}{e^2}$

$e^2 g''\left(elnx-\frac{e}{x}+1\right)<e+1 \iff g''\left(elnx-\frac{e}{x}+1\right)<\frac{e+1}{e^2} \iff$

$\iff g''\left(elnx-\frac{e}{x}+1\right)<g''(e) \iff \left(g'''(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}<0 \Rightarrow g''\gamma\nu.\varphi\theta\iota\nu.\right)$

$\overset{g''\downarrow}{\iff} elnx-\frac{e}{x}+1<e \iff lnx-\frac{1}{x}+\frac{1}{e}<1 \iff lnx-\frac{1}{x}+1<2-\frac{1}{e} \iff$

$\iff g'(x)<\frac{2e-1}{e} \iff g'(x)<g'(e) \overset{g'\uparrow}{\iff} x<e$

Άρα $0<x<e$.