

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

A2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A

Μονάδες 4

A3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X , αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).

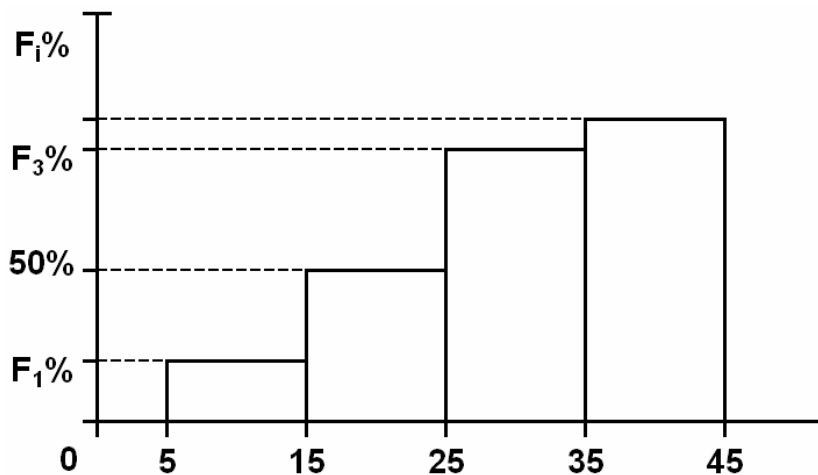
ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- β) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x , όταν $x=x_0$ (μονάδες 2).
- γ) Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (μονάδες 2).
- δ) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).
- ε) $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta_{\mu x} = \eta_{\mu x_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5, 45)$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



- B1.** Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha=8$ (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$[5, \cdot)$		$\alpha+4$			
$[\cdot, \cdot)$		$3\alpha-6$			
$[\cdot, \cdot)$		$2\alpha+8$			
$[\cdot, 45)$		$\alpha-2$			
Σύνολο					

Μονάδες 8

B3. Να βρεθεί η μέση τιμή \bar{x} και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9,17$)

Μονάδες 8

B4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν v φυσικός αριθμός με $v \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\frac{3v}{v^2+1}$

- Ισπανικά είναι $\frac{v+2}{v^2+1}$

- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{v+1}{v^2+1}$

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι $v=3$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}$, $x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $M(x, f(x))$, $x > 0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x, 0)$ και η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0, f(x))$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου $OK\Lambda\Lambda$ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

Δ3. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, $\beta \neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, 10$ της ευθείας ε , τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 10$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \emptyset$ και $A \cap B \neq \emptyset$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ



ΑΠΟ ΤΟ 1967

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2012

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 31 (Απόδειξη)

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 148 (Ορισμός)

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 96 (Ορισμός)

A4. α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Κατασκευάζοντας το πολύγωνο αθρ. σχετ. συχνοτήτων βρίσκουμε $\delta=25$ λεπτά.

B2. Από το ιστόγραμμα αθρ. σχετ. συχνοτήτων έχουμε $c=10$ και

$$F_2\% = 50$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha + 4 + 3\alpha - 6}{7\alpha + 4} \cdot 100 = 50 \Leftrightarrow \frac{4\alpha - 2}{7\alpha + 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8\alpha - 4 = 7\alpha + 4 \Leftrightarrow \alpha = 8$$

Επομένως $v_1=12$, $v_2=18$, $v_3=24$, $v_4=6$ και $v=v_1+v_2+v_3+v_4=60$ και με χρήση γνωστών τύπων έχουμε τελικά:

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΑΠΟ ΤΟ 1967

Χρόνοι	x_i	v_i	fi%	Ni	fi%
[5.15)	10	12	20	12	20
[15.25)	20	18	30	30	50
[25.35)	30	24	40	54	90
[35.45)	40	6	10	60	100
ΣΥΝΟΛΟ		60	100		

B3.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6}{60} = \frac{1440}{60} = 24'$$

$$s^2 = \frac{1}{60} \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 v_i = \frac{(10-24)^2 \cdot 12 + (20-24)^2 \cdot 18 + (30-24)^2 \cdot 24 + (40-24)^2 \cdot 6}{60} =$$
$$= \frac{196 \cdot 12 + 16 \cdot 18 + 36 \cdot 24 + 256 \cdot 6}{60} = \frac{5040}{60} = 84$$

$$s = \sqrt{84} \approx 9.17'$$

B4. Το διάστημα [37,45) είναι το $\frac{8}{10}$ της κλάσης [35,45) και επειδή οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένες το ζητούμενο ποσοστό είναι ίσο με $\frac{8}{10} \cdot f4\% = \frac{8}{10} \cdot 10\% = 8\%$

ΥΓ: Θα μπορούσε να υπολογιστεί και από το πολύγωνο με χρήση όμοιων τριγώνων.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα ενδεχόμενα

Γ : ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά

I : ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά

Είναι: $P(\Gamma) = \frac{3\nu}{\nu^2+1}$ $P(I) = \frac{\nu+2}{\nu^2+1}$

Το ενδεχόμενο " μαθαίνει και τις δύο γλώσσες" είναι το $\Gamma \cap I$

Άρα $P(\Gamma \cap I) = \frac{\nu+1}{\nu^2+1}$

Το ενδεχόμενο " μαθαίνει μια τουλάχιστον από τις δυο γλώσσες" είναι το $\Gamma \cup I$.

Άρα $P(\Gamma \cup I) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$

Γ1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \dots\dots\dots = 1$

Είναι $P(\Gamma \cup I) = 1$ και ο δ.χ. αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα είναι $\Gamma \cup I = \Omega$, Επομένως το $\Gamma \cup I$ είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2. $P(I \cup \Gamma) = P(I) + P(\Gamma) - P(I \cap \Gamma) \Leftrightarrow \frac{3\nu+1}{\nu^2+1} = 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0 \Leftrightarrow \nu = 3$, αφού $\nu \geq 3$

Γ3. Για $\nu=3$

$P(I - \Gamma) \cup (\Gamma - I) = P(I \cup \Gamma) - P(I \cap \Gamma)$
 $= 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Γ4.

$$N(\Gamma \cap I) = 32 \quad \text{και} \quad P(\Gamma \cap I) = \frac{2}{5}$$

Από κλασικό ορισμό πιθανότητας

$$P(\Gamma \cap I) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} = \frac{2}{5}$$

$$N(\Omega) = 80, \text{ αφού } N(\Gamma \cap I) = 32$$

ΘΕΜΑ Δ

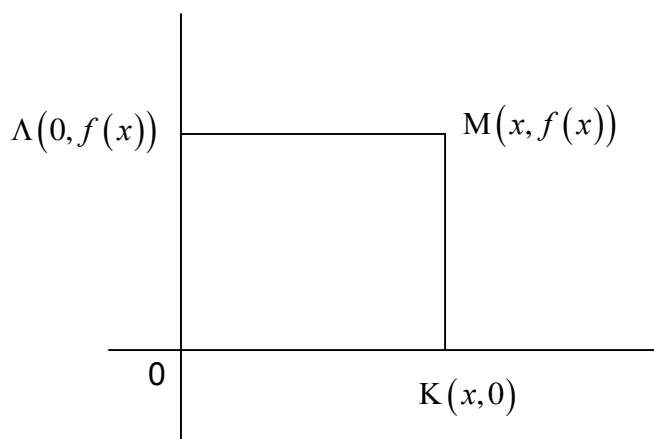
$$f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}, x > 0$$

Δ1.

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 - \ln^2 x}{x^2} = \frac{-(\ln^2 x - 2 \ln x + 1)}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2}$$

Είναι $x^2 > 0$ και $(\ln x - 1)^2 \geq 0$. Το “=” ισχύει μόνο για $x=e$.
Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \neq e$ επομένως f γνησίως φθίνουσα.

Δ2.



$$E = (OK)(OΛ) = x \cdot f(x) = x \cdot \frac{1 + \ln^2 x}{x} = 1 + \ln^2 x$$

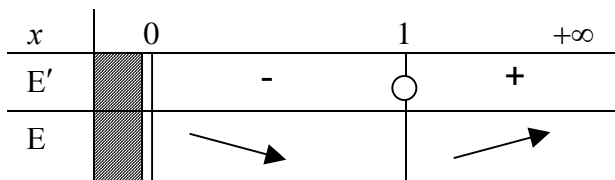
Άρα $E(x) = 1 + \ln^2 x$ με $x > 0$

$$E'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x}{x} > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0$$

$$\ln x > \overset{\ln x \uparrow}{\ln 1} \Leftrightarrow x > 1$$



$E \downarrow (0,1]$ κ $E \uparrow [1, +\infty)$ άρα ελάχιστο για $x = 1$

Τότε $(OK)=1$, $(OΛ)=f(1)=1$ επομένως ΟΚΜΛ τετράγωνο

Δ3.

$\varepsilon: y = \lambda x + \beta, \beta \neq 10$ Έστω (n) η εφαπτομένη της c_f στο $\Sigma(1, f(1))$. Τότε $\lambda_\eta = f'(1) = -1$
 $\varepsilon // \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -1$. Άρα $\varepsilon: y = -x + \beta, \beta \neq 10$

Είναι $y_i = -x_i + \beta$

Από εφαρμογή του σχολικού είναι: $\bar{y} = -\bar{x} + \beta \Leftrightarrow \bar{y} = -10 + \beta$ και $5y = |-1|5x = 2$

Το δείγμα των τεταγμένων είναι ομοιογενές όταν

$$CV_y \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{5y}{|\bar{y}|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|\beta - 10|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$20 \leq |\beta - 10| \Leftrightarrow \beta - 10 \geq 20 \text{ ή } \beta - 10 \leq -20 \Leftrightarrow \beta \geq 30 \text{ ή } \beta \leq -10$$

Δ4.

Επειδή

$A \neq \emptyset, A \cap B \neq \emptyset, P(A) \geq 0, P(A \cap B) \geq 0$ και ο δ.χ. αποτελείται από ισοπιθανά απλά ενδεχόμενα είναι
 $P(A) > 0$ και $P(A \cap B) > 0$

Όμως $A \subseteq A \cup B$ άρα $0 < P(A) \leq P(A \cup B)$

$A \cap B \subseteq A \cup B$ άρα $0 < P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$

Όμως $f \downarrow (0, +\infty)$ άρα

$$f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$$

$$f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B))$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$