ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ :

$1^{ο}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΟΤΗΤΕΣ : 1.1 – 1.5 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

$2^{ο}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΟΤΗΤΑ : 2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$;

Μονάδες 6

Α2. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι $\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1$ εφόσον $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα στον y΄y.

Μονάδες 7

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***ΣΩΣΤΟ*** αν η πρόταση είναι ***σωστή***, ή ***ΛΑΘΟΣ*** αν η πρόταση είναι ***λανθασμένη***.

Μονάδες 12

i. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-1,-3)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{1}{3}$.

ii. Αν $\vec{\alpha}=(x,0)$ τότε $\vec{\alpha}\,//\,x'x$.

iii. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ ισχύει $\vec{\mathrm{AB}}=\kappa\,\vec{\mathrm{A\Gamma}}$, $\kappa\in\Re$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

iv. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-4,4)$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{\beta}=(3,-3)$.

v. Αν $\vec{\alpha}=(1,-3)$, $\vec{\beta}=(-1,-3)$, $\vec{\gamma}=(2,-6)$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

vi. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ τότε κατ΄ ανάγκη $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

vii. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$=3 τότε $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.

viii. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=3$, για τα οποία ισχύει ότι : $(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta})\perp(6\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.

Β1. Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$.

Μονάδες 5

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, με $\lambda\in\Re$ το οποίο είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$.

Β3. Να δείξετε ότι : $\lambda=3$.

Μονάδες 5

Β4. Να δείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ είναι $|\vec{\gamma}|=3\sqrt{3}$.

Μονάδες 5

Β5. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha},\vec{\gamma})$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(1,5)$ και $\Gamma(4,-4)$.

Γ1. Να δείξετε ότι αποτελούν κορυφές τριγώνου.

Μονάδες 6

Γ2. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ του τριγώνου.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΒΔ, του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ, του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ οι διανυσματικές τους ακτίνες αντίστοιχα, με σημείο αναφοράς το Ο, δηλαδή $\vec{\alpha}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{\beta}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ και $\vec{\gamma}=\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$. Επιπλέον ισχύουν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=3$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{7}$ και $2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}-6\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-54$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}\right|=0$.

(Υπόδειξη : $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$)

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι ισχύει : $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}=\vec{0}$ και στη συνέχεια ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$.

Μονάδες 5

Δ5. Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $\vec{x}\,//(\vec{\beta}-\vec{\gamma})$ και $(\vec{x}+\vec{\alpha})\perp(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$. Να γράψετε το $\vec{x}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$;

Απάντηση : (σελ. 41 σχολικό βιβλίο) **Μονάδες 6**

Α2. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι $\lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$ εφόσον $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα στον y΄y

Απάντηση : (σελ. 43 σχολικό βιβλίο) **Μονάδες 7**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***ΣΩΣΤΟ*** αν η πρόταση είναι ***σωστή***, ή ***ΛΑΘΟΣ*** αν η πρόταση είναι ***λανθασμένη***.

Μονάδες 12

i. Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-1,-3)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{3}$ **(ΛΑΘΟΣ)**

ii. Αν $\vec{\alpha} = (x,0)$ τότε $\vec{\alpha} // x'x$ **(ΣΩΣΤΟ)**

iii. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ ισχύει $\vec{\mathrm{AB}} = \kappa \vec{\mathrm{A\Gamma}}$, $\kappa \in \Re$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. **(ΣΩΣΤΟ)**

iv. Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-4,4)$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{\beta} = (3,-3)$. **(ΣΩΣΤΟ)**

v. Αν $\vec{\alpha} = (1,-3)$, $\vec{\beta} = (-1,-3)$, $\vec{\gamma} = (2,-6)$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$. **(ΛΑΘΟΣ)**

vi. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε κατ΄ ανάγκη $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. **(ΛΑΘΟΣ)**

vii. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$=3 τότε $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ **(ΣΩΣΤΟ)**

viii. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **(ΛΑΘΟΣ)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=3$, για τα οποία ισχύει ότι : $(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta})\perp(6\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.

Β1. Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. **Μονάδες 5**

Β2. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$. **Μονάδες 5**

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, με $\lambda\in\Re$ το οποίο είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$.

Β3. Να δείξετε ότι : $\lambda=3$. **Μονάδες 5**

Β4. Να δείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ είναι $|\vec{\gamma}|=3\sqrt{3}$. **Μονάδες 5**

Β5. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha},\vec{\gamma})$. **Μονάδες 5**

<u>ΛΥΣΗ</u> :

Β1. $(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta})\perp(6\vec{\alpha}+\vec{\beta})\Leftrightarrow(3\vec{\alpha}+7\vec{\beta})\cdot(6\vec{\alpha}+\vec{\beta})=0\Leftrightarrow 18\vec{\alpha}^2+3\vec{\alpha}\vec{\beta}+42\vec{\alpha}\vec{\beta}+7\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18|\vec{\alpha}|^2+3\vec{\alpha}\vec{\beta}+42\vec{\alpha}\vec{\beta}+7|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow 45\vec{\alpha}\vec{\beta}=-135\Leftrightarrow\boxed{\vec{\alpha}\vec{\beta}=-3}$

Β2. $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\dfrac{-3}{2\cdot 3}=\dfrac{-1}{2}$ άρα $\boxed{(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{2\pi}{3}}$ ή $\boxed{(\vec{\alpha},\vec{\beta})=120^\circ}$

Β3. $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, όμως $\vec{\gamma}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow(\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow-3\lambda+|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-3\lambda+9=0\Leftrightarrow\boxed{\lambda=3}$

Β4. $|\vec{\gamma}|^2=\vec{\gamma}^2=(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=9\vec{\alpha}^2+6\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=9|\vec{\alpha}|^2+6\cdot(-3)+|\vec{\beta}|^2=36-18+9=27$

Άρα $|\vec{\gamma}|=\sqrt{27}\Leftrightarrow\boxed{|\vec{\gamma}|=3\sqrt{3}}$

Β5. $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\gamma})=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\gamma}|}=\dfrac{\vec{\alpha}(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})}{2\cdot 3\sqrt{3}}=\dfrac{3\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{6\sqrt{3}}=\dfrac{3|\vec{\alpha}|^2-3}{6\sqrt{3}}=\dfrac{12-3}{6\sqrt{3}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

άρα $\boxed{(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\pi}{6}}$ ή $\boxed{(\vec{\alpha},\vec{\beta})=30^\circ}$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(1,5)$ και $\Gamma(4,-4)$

Γ1. Να δείξετε ότι αποτελούν κορυφές τριγώνου. **Μονάδες 6**

Γ2. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ του τριγώνου. **Μονάδες 7**

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΒΔ, του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 6**

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ, του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 6**

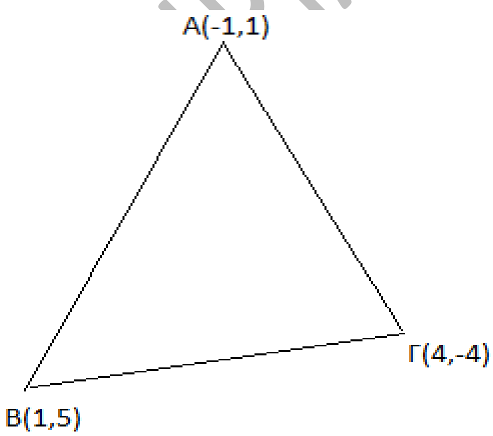
<u>ΛΥΣΗ</u> :

Γ1. Για να αποτελούν τα Α,Β,Γ κορυφές τριγώνου, αρκεί να μην είναι συνευθειακα δηλ. αρκεί : τα διανύσματα $\vec{\mathrm{AB}}$ και $\vec{\mathrm{B\Gamma}}$ να μην είναι παράλληλα. Αρκεί να δείξω ότι $\det\left(\vec{\mathrm{AB}},\vec{\mathrm{B\Gamma}}\right)\neq 0$.

Έχω : $\vec{\mathrm{AB}}=(2,4)$, $\vec{\mathrm{B\Gamma}}=(3,-9)$

Έτσι : $\det\left(\vec{\mathrm{AB}},\vec{\mathrm{B\Gamma}}\right)=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -9\end{vmatrix}=-18-12=-30\neq 0$ επομένως τα Α,Β,Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

Γ2.

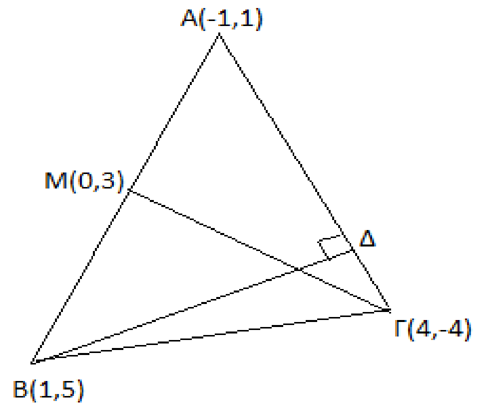


$$\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{B}}=\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\mathrm{BA}},\vec{\mathrm{B\Gamma}}\right)=\frac{\vec{\mathrm{BA}}\cdot\vec{\mathrm{B\Gamma}}}{\left|\vec{\mathrm{BA}}\right|\cdot\left|\vec{\mathrm{B\Gamma}}\right|}=\frac{(-2,-4)\cdot(3,-9)}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-9)^2}}=\frac{-6+36}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{90}}=\frac{30}{2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{10}}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$, άρα $\hat{\mathrm{B}}=45^\circ$ ή $\hat{\mathrm{B}}=\frac{\pi}{4}$.

Γ3. $(\mathrm{B}\Delta)\perp(\mathrm{A}\Gamma)\Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{B}\Delta}\cdot\lambda_{\mathrm{A}\Gamma}=-1$, $\lambda_{\mathrm{A}\Gamma}=\dfrac{y_\Gamma-y_\mathrm{A}}{x_\Gamma-x_\mathrm{A}}=\dfrac{-4-1}{4+1}=-1$, άρα $\lambda_{\mathrm{B}\Delta}=1$. Έτσι :

$(\mathrm{B}\Delta): y-y_\mathrm{B}=\lambda_{\mathrm{B}\Delta}(x-x_\mathrm{B})\Leftrightarrow(\mathrm{B}\Delta): y-5=1(x-1)\Leftrightarrow(\mathrm{B}\Delta): y-5=x-1\Leftrightarrow\boxed{(\mathrm{B}\Delta): y=x+4}$.



Γ4. Μ μέσο ΑΒ άρα : $x_\mathrm{M}=\dfrac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}=\dfrac{-1+1}{2}=0$ και $y_\mathrm{M}=\dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}=\dfrac{1+5}{2}=3$, άρα $\mathrm{M}(0,3)$

$\lambda_{\Gamma\mathrm{M}}=\dfrac{y_\mathrm{M}-y_\Gamma}{x_\mathrm{M}-x_\Gamma}=\dfrac{3+4}{0-4}=-\dfrac{7}{4}$,

άρα $(\Gamma\mathrm{M}): y-y_\mathrm{M}=\lambda_{\Gamma\mathrm{M}}(x-x_\mathrm{M})\Leftrightarrow(\Gamma\mathrm{M}): y-3=-\dfrac{7}{4}(x-0)\Leftrightarrow\boxed{(\Gamma\mathrm{M}): y=-\dfrac{7}{4}x+3}$

ΘΕΜΑ Δ

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οxy θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ οι διανυσματικές τους ακτίνες αντίστοιχα, με σημείο αναφοράς το Ο, δηλαδή $\vec{\alpha}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{\beta}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ και $\vec{\gamma}=\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$. Ισχύουν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=3$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{7}$ και $2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}-6\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-54$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}\right|=0$
(Υπόδειξη : $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$) **Μονάδες 5**

Δ2. Να δείξετε ότι ισχύει : $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}=\vec{0}$ και στη συνέχεια ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. **Μονάδες 5**

Δ3. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. **Μονάδες 5**

Δ4. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$. **Μονάδες 5**

Δ5. Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $\vec{x}\,//(\vec{\beta}-\vec{\gamma})$ και $(\vec{x}+\vec{\alpha})\perp(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$. Να γράψετε το $\vec{x}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$. **Μονάδες 5**

<u>ΛΥΣΗ</u> :

Δ1. $\left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}\right|^2=(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma})^2=\vec{\alpha}^2+4\vec{\beta}^2+9\vec{\gamma}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}-6\vec{\alpha}\vec{\gamma}-12\vec{\beta}\vec{\gamma}=$
$=|\vec{\alpha}|^2+4|\vec{\beta}|^2+9|\vec{\gamma}|^2+2(2\vec{\alpha}\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\vec{\gamma}-6\vec{\beta}\vec{\gamma})=108-108=0$, άρα $\boxed{\left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}\right|=0}$.

Δ2. Είναι $\vec{\alpha}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{\beta}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ και $\vec{\gamma}=\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$. Άρα επειδή :

$$\left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}\right|=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{AA}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AO}}-3\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}+3\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$$

Άρα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}//\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ δηλ. Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

Δ3. $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-3\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}+2\vec{\beta}=3\vec{\gamma}\Leftrightarrow(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2=(3\vec{\gamma})^2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{9}{2}}$.

Δ4. Επίσης : $\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\dfrac{\frac{9}{2}}{3\cdot3}=\dfrac{1}{2}$, άρα $\boxed{(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}}$ ή $\boxed{(\vec{\alpha},\vec{\beta})=60^\circ}$

Δ5. $\vec{x} /\!/ (\vec{\beta}-\vec{\gamma}) \Leftrightarrow \vec{x} = \lambda(\vec{\beta}-\vec{\gamma}) \Leftrightarrow \vec{x} = \lambda\vec{\beta}-\lambda\vec{\gamma}$

Επίσης : $(\vec{x}+\vec{\alpha}) \perp (\vec{\beta}+\vec{\gamma}) \Leftrightarrow (\vec{x}+\vec{\alpha})\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x}\vec{\beta}+\vec{x}\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0 \overset{*}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \vec{x}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})+\frac{9}{2}+6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda\vec{\beta}-\lambda\vec{\gamma})\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})+\frac{21}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda\vec{\beta}^2+\lambda\vec{\beta}\vec{\gamma}-\lambda\vec{\beta}\vec{\gamma}-\lambda\vec{\gamma}^2 = -\frac{21}{2} \Leftrightarrow \lambda\left(\left|\vec{\beta}\right|^2-\left|\vec{\gamma}\right|^2\right) = -\frac{21}{2} \Leftrightarrow 2\lambda = -\frac{21}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -\frac{21}{4}}$

Άρα : $\boxed{\vec{x} = -\frac{21}{4}\vec{\beta}+\frac{21}{4}\vec{\gamma}}$ (* $\vec{\alpha}-3\vec{\gamma} = -2\vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{\alpha}-3\vec{\gamma})^2 = (-2\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma} = 6$)