Επαναληπτικό διαγώνισμα στο κεφάλαιο των παραγώγων

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

(Μονάδες 4)

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

η f είναι συνεχής στο Δ και

$f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του x του Δ

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

(Μονάδες 6)

Α3. Αν $f(x)=1+|x|, x\in\mathbb{R}$ τότε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι λανθασμένοι

α) Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$.

γ) Η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

δ) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[-1,1]$.

(Μονάδες 2)

Α4. Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό

«Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε για την παράγωγό της υποχρεωτικά ισχύει ότι $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ).

(Μονάδες 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

(Μονάδες 2)

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

α)Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in(0,1)$ τότε $f(0)\neq f(1)$.

β)Αν για τη συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$ τότε η f έχει το πολύ μία ρίζα.

γ)Αν για τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύουν $f'(x)=g(x)$ και $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,τότε υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f^2(x)+g^2(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ)Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ τότε η f είναι σταθερή στο $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

ε)Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει τουλάχιστον μια εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο $(\xi, f(\xi))$ με $\xi\in(\alpha,\beta)$ η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ όπου $\mathrm{A}(\alpha, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β.

Α)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(10)=42$ και $f'(x^3+x)=\dfrac{4x(3x+1)}{3x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

1)Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(-10, f(-10))$

(Μονάδες 6)

2)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x)=3x^2-f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2,2)$

(Μονάδες 7)

Β)Μια ευθεία με αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης στρέφεται γύρω από το σημείο $\Sigma(1,1)$.Αν ο συντελεστής διεύθυνσής της μεταβάλλεται με ρυθμό -4 και η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία A,B ,τότε

1)να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του συντελεστή διεύθυνσης

(Μονάδες 5)

2)να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή που η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3,0)$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με $A=(0,1)\cup(1,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(e)=1$ και $\left(\ln x^{f(x)}-1\right)\left(\ln x^{f(x)}+1\right)=0$ για κάθε $x \in A$.

Γ1.Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}, x \in A$

(Μονάδες 4)

Γ2.α)Να αποδειχθεί ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>1$.

(Μονάδες 3)

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $f(x+2)+f(x+4)<f(x)+f(x+6)$

(Μονάδες 5)

Γ3.Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in \left(\dfrac{1}{e},1\right)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ να σχηματίζει με τους άξονες x'x και y'y τρίγωνο με εμβαδό $\mathrm{E}=\dfrac{2}{3}$.

(Μονάδες 7)

Γ4.'Ενα σημείο $\mathrm{M}(\alpha, f(\alpha))$ κινείται στην $y=f(x)$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2cm|\sec$.Έστω Α το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f στο Μ τέμνει τον x'x. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του Α τη στιγμή που είναι $a=e$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και $f(2)=4$

1)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)f'(x)=3f'(x)+4x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1,2)$

(Μονάδες 7)

2)Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$,ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

(Μονάδες 5)

3)Αν η $f\,'$ είναι γνησίως αύξουσα,τότε να αποδείξετε ότι

α)υπάρχει μονάδικο $x_o \in (1,2)$,ώστε $f\,'(x_0) = 2$

(Μονάδες 6)

β)ισχύει ότι $f(4) > 8$

(Μονάδες 7)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!