Επαναληπτικές ασκήσεις Γ Λυκείου Μαθηματικά
Θεωρήματα : Bolzano-Rolle-Μέσης τιμής

1) **α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0,\pi)$ ισχύει

$$e^x \eta\mu x - e^{\eta\mu x} < (x-1)e^x$$

β) Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{e^x-1-e}{x} + \frac{1}{\eta\mu x} = \frac{(x-1)e^x}{x\eta\mu x} + 1 \quad (1)$$

έχει στο $(0,\frac{\pi}{2})$ *μία τουλάχιστον ρίζα.*

2) Η συνάρτηση $f: R \to R$ με f(x)>0 για κάθε $x \in R$ είναι παραγωγίσιμη και f(α)=f(β) με α<β .Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = lnf(x) + x$

Δείξτε ότι :

i) Υπάρχει σημείο της C_g στο οποίο ορίζεται εφαπτομένη παράλληλη στη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

ii) Υπάρχει $\rho \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\rho) = lnf(a) + \frac{\alpha+\beta}{2}$

iii) Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\rho), όπου\ \rho\ αυτό\ του\ ερωτήματος\ ii,$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) > -\frac{f(\xi)}{2}$.

3) Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [-\alpha,\alpha] \to R$, α>0 η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) + f'(-x) = 0$ (1) για κάθε $x \in [-\alpha,\alpha]$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\alpha,\alpha)$. Δείξτε ότι:

i) Η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

ii) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ (2) έχει στο $(-\alpha,\alpha)$ μοναδική ρίζα.

iii) Υπάρχει θ∈(0,1) τέτοιο ώστε $f'(\alpha) = \alpha f''(\theta \cdot \alpha)$.