Λύση άσκησης

α. Θεωρούμε $g(t)=t^3+e^t$ όπου η g είναι γνησίως αύξουσα.

Η (1) γράφεται: $g\big(f(x)\big)=x+e$. Έστω $h(x)=x+e$ γνησίως αύξουσα.

Καθώς $D_h=D_{g\circ f}=\mathbb{R}$ άρα $g\circ f=h$ άρα $g\circ f$ γνησίως αύξουσα.

Έστω $x_1<x_2$ $\quad x_1,x_2\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\ (g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)\ \Rightarrow\ g\big(f(x_1)\big)<g\big(f(x_2)\big)$

$\overset{g\uparrow}{\Rightarrow}\ f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Για $x=1$ $\eta\ (1)=f^3(1)+e^{f(1)}=1+e$

$\Rightarrow\ g\big(f(1)\big)=g(1)\ \overset{g1-1}{\Longrightarrow}\ f(1)=1$

γ. Εφόσον η f 1-1 ως γνησίως αύξουσα ορίζεται η f^{-1} με $D_{f^{-1}}=f\big(D_f\big)=\mathbb{R}$

Δηλαδή με $x\in D_f=\mathbb{R}$ και $y\in D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

$f(x)=g\ \Leftrightarrow\ f^{-1}(y)=x$

η (1) γράφεται: $y^3+e^y=f^{-1}(y)+e\quad y\in\mathbb{R}$

άρα $f^{-1}(x)=x^3+e^x-e\,,\ \ x\in\mathbb{R}$

δ. $\lim_{x\to 0^-}\frac{f^{-1}(x)}{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+e^x-e}{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}=$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}\right)\cdot\lim_{x\to 0^-}(x^3+e^x-e)=(+\infty)\cdot(1-e)=-\infty$$

αφού

- $\lim_{x\to 0^-}(x^3+e^x-e)=e^0-e=1-e$
- $\lim_{x\to 0^-}\left(2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{u\to -\infty}(2^u+3^u)=0+0=0$

  $u=\frac{1}{x}\quad \begin{cases} x\to 0^- \\ u\to -\infty \end{cases}$

  και $2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}>0$

ε. Παρατηρούμε $2>1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(2)>f(1)=1$

$3>1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(3)>f(1)=1$

$4>1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(4)>f(1)=1$

Ορίζουμε $\lim_{x\to +\infty}a^x=+\infty\ ,\ a>1$

Άρα το όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$.

Έτσι βγάζουμε κοινό παράγοντα την εκθετική με τη μεγαλύτερη βάση

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(f(4))^x\left(\left(\frac{f(2)}{f(4)}\right)^x+\left(\frac{f(3)}{f(4)}\right)^x\cdot f(3)+1\right)}{(f(4))^x\left(\left(\frac{f(2)}{f(4)}\right)^x\cdot f(2)+\left(\frac{f(3)}{f(4)}\right)^x+2\right)}=\frac{0+0+1}{0+0+2}=\frac{1}{2}$$

Καθώς $\lim_{x\to +\infty}a^x=0\ ,\ 0<\ a<1$ οι εκθετικές που έχουν μείνει μετά την παραγοντοποίηση έχουν βάση <1.

στ. i) g συνεχής ως πολυωνυμική στο [0,1] και [1,2].

$$\begin{cases} g(0) = 1 > 0 \\ g(1) = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow g(0)g(1) < 0$$

από Θ. Β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,1)$: $g(x_1) = 0$

$$\begin{cases} g(1) = -2 < 0 \\ g(2) = 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow g(1)g(2) < 0$$

από Θ. Β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (1,2)$: $g(x_2) = 0$

ii) Υπολογίζουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(e^{\frac{1}{f(x)}} - 1\right)\eta\mu x + \left(f(x) + \sigma\upsilon\nu f(x)\right)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)$

Καθώς $\begin{cases} D_f = (-\infty, +\infty) \\ f \ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma \ \kappa\alpha\iota \ \uparrow \end{cases}$ $f(D_f) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) \Rightarrow f(D_f) = (-\infty, +\infty)$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- Έστω $g(x) = e^{\frac{1}{f(x)}} - 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{\frac{1}{f(x)}} - 1) = \lim\limits_{\omega\to0}(e^{\omega} - 1) = 0$

$$\omega = \frac{1}{f(x)}$$

$$x \to +\infty, \omega \to 0$$

Έτσι $|\eta\mu x| \leq 1 \iff |g(x)||\eta\mu x| \leq |g(x)| \iff |g(x)\cdot\eta\mu x| \leq |g(x)|$

$\iff -|g(x)| \leq g(x)\eta\mu x \leq |g(x)|$, $\forall x$ κοντά στο $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} |g(x)| = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (-|g(x)|) = 0 \end{cases} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)\eta\mu x = 0 \text{ από Κ.Π.}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\big(f(x)+\sigma\upsilon\nu f(x)\big)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left((\omega\sigma\upsilon\nu\omega)\eta\mu\frac{1}{\omega}\right)=$

$$=\lim_{\omega\to+\infty}\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\omega}\right)\omega\eta\mu\frac{1}{\omega}=(1+0)\cdot 1=1$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\omega}=0 \quad (\text{κατά τα γνωστά με Κ.Π.})\\[2ex] \lim\limits_{\omega\to+\infty}\omega\eta\mu\dfrac{1}{\omega}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\eta\mu t}{t}=1 \quad \left(t=\dfrac{1}{\omega}\right)\end{cases}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(e^{\frac{1}{f(x)}}-1\right)\eta\mu x+\big(f(x)+\sigma\upsilon\nu f(x)\big)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(e^{\frac{1}{f(x)}}-1\right)\eta\mu x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\big(f(x)+\sigma\upsilon\nu f(x)\big)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)=0+1=1$$

Άρα ζητάμε $\xi\in(x_1,x_2)$ ώστε $f(\xi ln\xi)=f\Big(g\big(\xi+g(\xi)\big)\Big)$

$\overset{f1-1}{\iff}\ \ \xi ln\xi=g\big(\xi+g(\xi)\big)$

Δηλαδή ζητάμε ρίζα για την εξίσωση $xlnx=g\big(x+g(x)\big)\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \ xlnx-g\big(x+g(x)\big)=0$

Θέτω $R(x)=xlnx-g\big(x+g(x)\big)$

Η *R(x)* είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών στο $[x_1,x_2]$.

$R(x_1)=x_1lnx_1-g\big(x_1+g(x_1)\big)=x_1lnx_1-g(x_1)=x_1lnx_1<0$

$$\begin{pmatrix}0<x_1<1\\ lnx_1<0\end{pmatrix}$$

$R(x_2)=x_2lnx_2-g\big(x_2+g(x_2)\big)=x_2lnx_2-g(x_2)=x_2lnx_2>0$

$$\begin{pmatrix}0<x_2<1\\ lnx_2<0\end{pmatrix}$$

$R(x_1)R(x_2)<0$ Άρα από Θ.Β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1{,}2)$: $R(\xi)=0$